

ISSN 0869-2513

ВСЕСОЮЗНАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

КВАНТОР



И. Ф. ШАРЫГИН

ИЗБРАННЫЕ
ЗАДАЧИ
ПО ГЕОМЕТРИИ
КОНКУРСНЫХ
ЭКЗАМЕНОВ
В ВУЗЫ
(1987—1990)

5



И. Ф. ШАРЫГИН

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ
ПО ГЕОМЕТРИИ
КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНОВ
В ВУЗЫ
(1987—1990)

Львов
Журнал «Квантор»
1991

Предлагаемое пособие состоит из трех частей. Первая часть представляет своего рода небольшой курс геометрии, курс обобщающе-повторительного типа, в котором геометрические факты и методы привязываются к основным геометрическим фигурам и телам, а единственным критерием отбора этих фактов является полезность при решении геометрических задач. Две оставшиеся части состоят главным образом из геометрических задач конкурсных экзаменов последних лет. Для полноты информации и более точной оценки сложности соответствующего экзамена здесь указывается число задач в варианте и местоположение в нем рассматриваемой задачи. (Читатель, конечно же, знает, — уровень сложности задач в вариантах конкурсного экзамена значительно возрастает к концу). Здесь авторская позиция выявляется, с одной стороны, в отборе материала, а с другой, — в указаниях и решениях, которые, по мысли автора, должны в первую очередь иллюстрировать авторскую концепцию геометрии и обусловленную ею технологию решения геометрических задач. Правда, одно отступление от своей идеологии автор был вынужден сделать чисто по техническим причинам. Дело в том, что во второй и третьей частях практически отсутствуют чертежи. Разбираясь в указаниях и решениях читателю придется выполнять их самостоятельно. Впрочем, это обстоятельство может способствовать улучшению обучающих возможностей пособия, поскольку самостоятельная работа над чертежом способствует более глубокому проникновению в условие задачи, делает читателя, в числе которых хотелось бы видеть как школьных учителей, так и старшеклассников, готовящихся к поступлению в институт, соучастником разбираемого в пособии решения.

Хотелось бы сделать еще одно замечание. К сожалению, не все задачи, включенные в пособие, достаточно хороши, как с формально-математической, так и с эстетической точки зрения. Среди них достаточно много плохо — небрежно и коряво — сформулированных и даже не совсем корректных. Но как говорится, «такова жизнь», а точнее — конкурсный экзамен. Поэтому советую читателю относиться к предлагаемому материалу критически. (Этот совет касается и написанного непосредственно самим автором.) Подобный критический подход полезен всегда, а учителю математики просто необходим.

Главный редактор
Ю. М. Леви

И. Ф. Шарыгин

Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы
(1987—1990)

Сдано в набор 18.03.91. Подписано к печати 15.07.91. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага тип № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5.04.
Усл. кр.-отт. 5.56. Тираж 100 000 экз. Зак. 1—921. Цена 2 р. 80 к.
(для подписчиков).

Журнал «Квантор», 292310, г. Нестеров, ул. Горького, 8
Головное предприятие республиканского производственного объединения
«Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3.

© Журнал «Квантор», 1991

I. 12 УРОКОВ ГЕОМЕТРИИ.

ВВЕДЕНИЕ

Первым и важнейшим этапом решения геометрической задачи является построение чертежа. Нельзя научиться решать достаточно содержательные геометрические задачи, не выработав прочных навыков по изготовлению «хороших» чертежей, не выработав привычки (даже рефлекса) — не начинать решать задачу, пока не сделан «большой и красивый» чертеж, удовлетворяющий не только формально математическим требованиям, но и известным эстетическим критериям. Обращаем внимание на то, что речь идет об этапе собственно решения задачи, а не об оформлении найденного решения на чистовике. И еще — желательно научиться изготовлять чертежи достаточно хорошего качества от руки, поскольку жесткая установка на использование чертежных инструментов может привести к известной закрепощенности, сузить оперативный простор в процессе работы над решением. Мы не будем пока дальше и глубже разрабатывать эту тему, ограничившись уже сказанными общими словами. Более конкретные рекомендации мы будем давать, рассматривая конкретные примеры, предъявляя одновременно оптимальное на наш взгляд графическое оформление.

В качестве основного инструмента, основного метода решения геометрических задач, который следует освоить и отработать в первую очередь, мы выдвигаем алгебраический метод, поскольку этот метод, вернее, основные его модификации могут быть в достаточной степени алгоритмизированы. Имеются в виду две модификации: метод поэтапного решения (аналогия — текстовые арифметические задачи, решаемые «по действиям») и метод составления уравнений (соответственно аналогия — текстовые задачи на составление уравнений). Конечно, граница между этими модификациями условна, а формально-математически можно считать, что первая — частный случай второй, однако, с точки зрения здравого смысла различие между ними очевидно и существенно и педагогически вполне оправдано. Рассматривая каждую задачу вместе с методом ее решения, выделим некоторое множество так

называемых элементарных задач. Под элементарными мы будем понимать задачи в одно действие (при этом под «действием» понимается также и решение одного элементарного, т. е. линейного, квадратного и др. уравнения), сделанного на основании известной теоремы или формулы (свойство подобных треугольников, теорема косинусов, формула для площади стандартной фигуры и т. д.), причем конфигурация, к которой эта формула или теорема применяется, достаточно четко обозначена в условии задачи. Здесь вновь, во второй раз на протяжении одного абзаца приходится говорить об условности, размытости границы, на сей раз — границы множества элементарных задач. Тем не менее выделение указанного множества педагогически представляется оправданным и полезным, поскольку очень часто решение более сложных, более содержательных геометрических задач может быть, как из «кирпичиков», составлено из задач элементарных, простейших. Очень важно постараться определить, если так можно выразиться, оптимальные размеры этих «кирпичиков» — чрезмерно мелкие не слишком удобны для строительства (чрезмерно большие — также, хотя привести примеры таковых мы не можем). Ставя во главу угла алгебраический метод решения геометрических задач, мы тем не менее считаем необходимым предостеречь от чрезмерного увлечения алгеброй и счетом, не забывать о том, что речь идет все же о геометрических задачах, а поэтому, работая над задачей, следует искать геометрические особенности, учиться смотреть и видеть геометрию.

Итак, мы выделили два слагаемых, определяющих умение решать геометрические задачи, — чертеж плюс метод (прежде всего — алгебраический). Добавим сюда третье слагаемое — владение определенным объемом вспомогательных геометрических фактов и теорем, наличие достаточного активно используемого запаса опорных задач. Дело в том, что в школьный курс геометрии, в его теоретическую часть включены, в основном, теоремы, работающие на сам этот курс, необходимые для его дальнейшего развития. Многие теоремы, в известном смысле прикладного характера, областью приложения которых является задача, а не теория, из курса исключены. В связи с этим возникает необходимость в выделении некоторого количества задач, так называемых опорных задач, представляющих из себя набор дополнительных к курсу теорем или иллюстрирующих тот или иной часто встречающийся метод или прием решения задач, которые учащийся должен усвоить и освоить. По мере роста сложно-

сти решаемых задач, вообще говоря, должен расширяться и список опорных задач. В дальнейшем задачи, которые мы считаем необходимым отнести к категории опорных, будем отмечать знаком (!).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, отметим одну особенность систематического курса, в известной степени затрудняющую процесс обучения решению геометрических задач. Учащиеся большей частью заняты изучением конкретной темы и решением задач по этой теме. Времени на то, чтобы порешать задачи по всей геометрии в целом практически не остается. В отличие от школьного курса, последовательность изучения задачного материала в нашем пособии определяется не тематикой и соответствием порядку изложения в учебнике, а уровнем сложности задач и степенью стандартности. При этом мы предполагаем, что наш читатель хотя бы на минимальном уровне владеет всем курсом школьной геометрии (планиметрии).

ПЛАНИМЕТРИЯ.

1. Треугольник. Элементарные и опорные задачи. Теорема косинусов.

Обычно мы будем обозначать треугольник буквами A, B, C (записываем — треугольник ABC или символически $\triangle ABC$), при этом буквы A, B, C обозначают как точки — вершины треугольника, так и величины соответствующих углов треугольника. Стороны, вернее, длины сторон, будем обозна-

чать маленькими буквами a, b, c — при этом одинаковыми буквами, большой и маленькой, будем обозначать вершину и противолежащую ей сторону (рис. 1), т. е. $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

Вероятно, наиболее «работающей» теоремой школьного курса геометрии, во всяком случае, если смотреть на этот курс с точки зрения практики конкурсного экзамена, является теорема косинусов и ее частный случай — теоре-

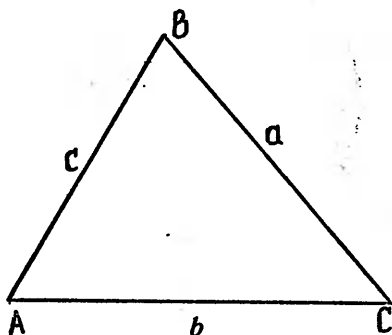


Рис. 1

ма Пифагора. Напомним теорему косинусов, т. е. напомним формулу, носящую это название.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Теорема косинусов определяет три элементарные задачи:

1. Даны две стороны треугольника и угол между ними, найти третью сторону.
2. Даны три стороны треугольника, найти какой-либо угол треугольника (косинус угла).
3. Даны две стороны треугольника и угол не между ними, найти третью сторону треугольника.

Если в первых двух задачах искомый элемент вычисляется однозначно и, так сказать, напрямую, то в третьей задаче для нахождения нужной стороны нам приходится решать квадратное уравнение. Понятно, что третья задача может иметь или два, или одно, или ни одного решения. Понятны также геометрические причины этого явления. Дело в том, что соответствующая задача на построение треугольника по двум сторонам и углу, не лежащему между ними, может иметь одно или два решения или не иметь решения. На рис. 2а показан случай, когда задача

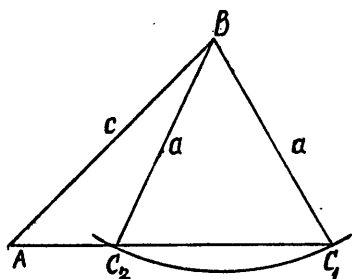


Рис. 2а

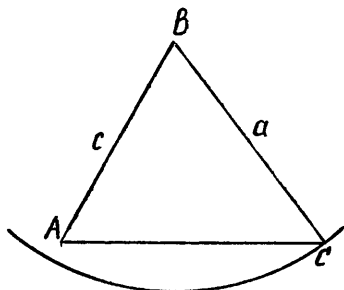


Рис. 2б

построения треугольника ABC по углу A и сторонам a и c имеет два решения, на рис. 2б эта же задача имеет одно решение: «видно», (при условии $\angle A < 90^\circ$) что при $a \geq c$ — решение одно; если $h < a < c$, где h — расстояние от точки B до AC ($h = c \sin A$), решений два; при $a = h$ вновь одно решение; если $a < h$, решений нет. (Если $\angle A \geq 90^\circ$, то при $a \leq c$ решений нет, при $a > c$ — одно решение.)

Теорема косинусов очень часто используется для составления уравнения (уравнений).

4. Стороны треугольника образуют арифметическую

прогрессию с разностью, равной 1. Косинус среднего по величине угла этого треугольника равен $\frac{2}{3}$. Найти периметр этого треугольника.

Решение. Обозначим среднюю по величине сторону через x . Тогда две другие равны $x-1$ и $x+1$. Данный угол противолежит стороне длины x . (Почему? Напомним известную теорему планиметрии: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Из этой теоремы следует, что если стороны треугольника расположить в порядке возрастания, то противолежащие углы также расположатся в порядке возрастания). Теперь на основании теоремы косинусов составляем уравнение $x^2 = 2x^2 + 2 - \frac{4}{3}(x^2 - 1)$, из которого $x = \sqrt{10}$. Ответ: $3\sqrt{10}$.

Относится ли эта задача к категории элементарных, следует ли ее отнести к этой категории — вопрос спорный. Скорее всего, нет. Хотя задача эта, безусловно, очень проста. Приведем еще один пример простой неэлементарной задачи, составленной очевидным образом из двух уже известных нам «кирпичей».

5. В треугольнике ABC известны стороны $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$. На стороне AB взята точка M так, что $BM=2AM$, а на стороне BC взята точка K так, что $3BK=2KC$. Найти длину отрезка MK .

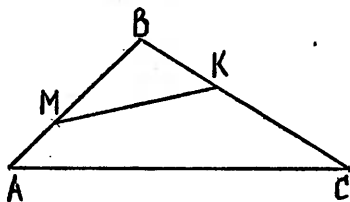


Рис. 3

Решение задачи очевидным образом составляется из двух шагов. (Если же учитывать в качестве отдельных элементов нахождение отрезков BM и BK , то получаем четыре шага.) Первый шаг — по теореме косинусов нахо-

дим косинус угла B (задача 2), второй шаг — из треугольника MVK по теореме косинусов находим MK (задача 1).

Ответ: $4\frac{7}{15}$.

Стоит запомнить и включить в категорию опорных задач следующую теорему:

6. (!) Треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли квадрат его наибольшей стороны соответственно меньше, равен или больше суммы квадратов двух других сторон.

Утверждение этой задачи легко следует из теоремы косинусов и свойств косинуса. Докажите ее самостоятельно.

И еще несколько задач для самостоятельного решения:

7. Определить вид треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный) и найти косинус наибольшего угла треугольника, если его стороны равны: а) 6, 7, 9; б) 7, 24, 25; в) 23, 25, 34. (а) остроугольный, $\cos \alpha = \frac{1}{21}$; б) прямоугольный; в) тупоугольный, $\cos \alpha = -\frac{2}{575}$)

8. В треугольнике ABC отрезок, соединяющий середины AB и BC , равен 3, сторона AB равна 7, угол C равен 60° . Найти сторону BC .

Ответ: $(3 + \sqrt{22})$

9. В треугольнике ABC известны стороны $AC=2$, $AB=3$, $BC=4$. Пусть BD — высота этого треугольника (D — на прямой AC). Найти длину отрезка CD .

Ответ: $\left(\frac{3}{4}\right)$

10. (!) Пусть m_a — длина медианы, проведенной к стороне a треугольника. Две другие стороны равны b и c . Доказать, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

11. В треугольнике со сторонами 3, 4 и 6 проведена медиана к большей стороне. Определить косинус угла, образованного медианой с меньшей стороной треугольника.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{14}}{12}\right)$

2. Прямоугольный треугольник.

Мы отметили в предыдущем параграфе, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. Это утверждение нуждается в соответствующем пояснении. Речь идет лишь о формулировках обеих теорем. В этом смысле теорема Пифагора получается из теоремы косинусов при $A=90^\circ$.

С точки зрения логики построения курса геометрии теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора (теорему Пифагора нельзя доказывать, ссылаясь на теорему косинусов), само наличие « $\cos A$ » показывает, что теорема косинусов следует за теоремой Пифагора.

Помещая параграф, посвященный прямоугольному треугольнику, после теоремы косинусов, мы нарушаем порядок следования, определенный логикой построения курса. Впрочем, мы и не обещали, что будем придерживаться этого порядка. С другой стороны, считаем необходимым выделить отдельно тему «прямоугольный треугольник». Очень часто встречаются задачи, для решения которых надо увидеть, вычленить прямоугольный треугольник, после чего все сводится к работе с этим треугольником.

Сформулируем сначала несколько простых, но полезных утверждений.

12. (!) Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит этот треугольник на два подобных между собой и подобных исходному треугольнику треугольника.

13. (!) Медиана, выходящая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение: если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный. Прямым является угол, из вершины которого выходит рассматриваемая медиана.

Оба утверждения достаточно просто доказываются. Тем не менее мы укажем несколько возможностей для доказательства утверждения задачи № 13.

1. Можно воспользоваться формулой для длины медианы (задача № 10).

2. Пусть в треугольнике ABC угол C прямой, углы A и B равны соответственно α и $90^\circ - \alpha$ (рис. 4а).

Возьмем на AB точку O так, что $\angle OCA = \alpha$,

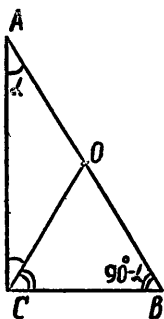


Рис. 4а

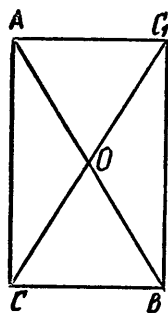


рис. 4б

$\angle OCB = 90^\circ - \alpha$. Тогда треугольники COA и COB равно-

бедренные, $CO=OA$, $CO=OB$, т. е. CO — медиана и $CO=\frac{1}{2}AB$.

3. Продолжим медиану CO прямоугольного треугольника ACB ($\angle ACB=90^\circ$) на расстояние, равное ей. Получим четырехугольник $ACBC_1$ (рис. 4б). Этот четырехугольник будет параллелограммом для любого треугольника ABC (Докажите и запомните. Подобное дополнительное построение часто бывает полезным в задачах, в условии которых фигурирует медиана). В нашем случае этот параллелограмм является прямоугольником. В прямоугольнике диагонали равны. Значит, $CO=\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{2}AB$.

Сформулируем еще одну опорную задачу.

14. (!) Пусть CD — высота прямоугольного треугольника ABC , опущенная на гипотенузу AB . Тогда $CD^2=AD \cdot DB$, $AC^2=AB \cdot AD$, $BC^2=BA \cdot BD$.

Докажем первое равенство (рис. 5). Из подобия тре-

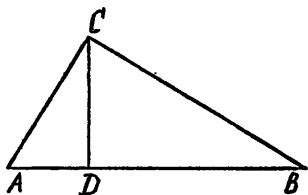


Рис. 5

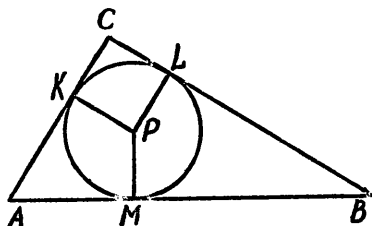


Рис. 6

угольников ACD и CDB (задача № 12) ($\angle CAD = \angle DCB$, $\angle ACD = \angle CBD$) получаем $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, откуда $CD^2=AD \cdot DB$. Два других равенства следуют соответственно из подобия треугольников ACD и ABC , BCD и BAC .

Пусть R и r — соответственно радиус описанной и вписанной окружности прямоугольного треугольника (как обычно, a и b — катеты, c — гипотенуза этого треугольника), справедливы формулы:

15. (!) $R=\frac{c}{2}$, причем центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.

16. (!) $r=\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$, где p — полупериметр треугольника, $2p=a+b+c$

Утверждение задачи № 15 следует из утверждения

задачи № 13 (Впрочем, оно следует и из более общего утверждения. См. в связи с этим параграф «Теорема синусов». Докажем формулу для r (задача № 16). Пусть P — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 6, $\angle C = 90^\circ$). $CKPL$ — квадрат со стороной r , $AM = AK = AC - CK = b - r$, $BM = BL = BC - CL = a - r$. Поскольку $AM + MB = c$, то $(b - r) + (a - r) = c$, откуда $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$. Учитывая теорему Пифагора, получим

$$r = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}) \quad (16a)$$

Легко видеть также, что

$$R + r = \frac{1}{2}(a + b) \quad (16b)$$

На основании 1-ой формулы задачи № 14 можно сформулировать (с точностью до обозначения) две элементарные задачи: известны отрезки гипотенузы, на которые она разделена высотой, найти высоту; известна высота и один из отрезков гипотенузы, найти второй отрезок. Каждая из двух других формул (на самом деле это одна формула) определяют три элементарные задачи. (Какие?)

В заключение этого параграфа сформулируем «обобщенную теорему Пифагора».

17. Пусть CD — высота в прямоугольном треугольнике ABC , опущенная на гипотенузу. Возьмем в подобных треугольниках CBD , ACD и ABC сходственные линейные элементы. Обозначим величины этих элементов через d_a , d_b и d_c . Тогда имеет место равенство

$$d_a^2 + d_b^2 = d_c^2$$

Данное утверждение следует из теоремы Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$) и свойства подобных треугольников. В самом деле стороны $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ являются сходственными в треугольниках CBD , ACD и ABC . Для любых сходственных линейных элементов этих треугольников имеет место $\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c}$. Обозначив эти отношения через k , получим $d_a = ka$, $d_b = kb$, $d_c = kc$. Следовательно, $d_a^2 + d_b^2 = d_c^2$, поскольку $a^2 + b^2 = c^2$.

Решите следующие задачи.

18. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найти катеты этого треугольника.

Ответ: $(12\sqrt{13}, 18\sqrt{13})$

19. Катет прямоугольного треугольника равен 6, проекция этого катета на гипотенузу равна 2. Найти гипотенузу и другой катет этого треугольника.

Ответ: $(18, 12\sqrt{2})$

20. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известно, что его стороны образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1.

Ответ: (5)

21. Найти наименьший острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, выходящая из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении 2:1.

Ответ: (30°)

22. Чему равен острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника?

Ответ: (45°)

23. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?

Ответ: $(3\sqrt{2})$

24. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Чему равен радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, середину большего катета и противоположащий острый угол?

Ответ: $(\frac{1}{2}\sqrt{13})$

25. Один катет прямоугольного треугольника равен 6, медиана, опущенная на этот катет, равна 5. Найти гипотенузу этого треугольника.

Ответ: $(2\sqrt{13})$

26. Один катет прямоугольного треугольника равен 5, а проекция другого катета на гипотенузу равна 2,25. Найти гипотенузу этого треугольника.

Ответ: $(6\frac{1}{4})$

27. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найти отношение большего катета к меньшему.

Ответ: $(\sqrt{3})$

28. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит треугольник на два. Радиусы окружностей, вписанных в эти два треугольника, равны 1 и 2. Найти радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

Ответ: $(\sqrt{5})$

3. Описанная окружность. Теорема синусов.

Как мы знаем, у любого треугольника существует единственная описанная около него окружность, центр которой совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. (Повторите соответствующие разделы школьного учебника. Ответьте на вопрос: Почему серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке?) Напомним еще один факт из школьного курса. Рассмотрим окружность с центром O . Пусть BAC — угол, вписанный в эту

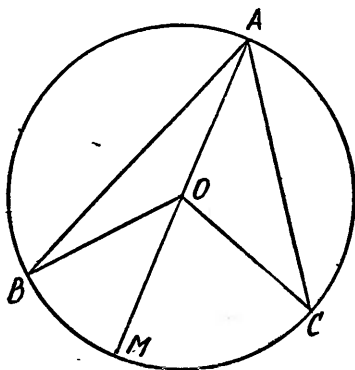


Рис. 7а

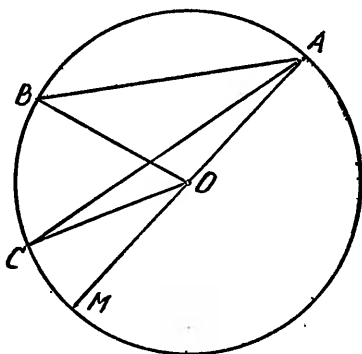


Рис. 7б

окружность (рис. 7а, б). Этот угол определяет на окружности дугу BC (на этой дуге нет точки A) и центральный угол BOC , измеряемый этой дугой. Как видим, угол BOC может быть больше 180° , если определяемая углом BAC дуга больше полуокружности. Соответствующая теорема школьного курса утверждает, что центральный угол BOC в два раза больше вписанного угла BAC . Или иначе: вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. (Коротко напомним доказательство. Проведем диаметр AM . Треугольник AOC равнобедренный, $\angle OAC = \angle OCA$, $\angle COM$ — внешний угол этого треугольника, он равен сумме двух внутренних с ним несмежных: $\angle COM = \angle OAC + \angle OCA = 2 \angle OAC$. Точно так же $\angle BOM = 2 \angle BOA$. Теперь легко получим, что и угол BOC в два раза больше угла BAC . В случае, изображенном на рис. 7а, угол BOC составлен из двух частей $\angle COM$ и $\angle BOM$, каждая из которых в два раза больше соответствующей части угла BAC ($\angle CAO$ и

$\angle BAO$). В случае, изображенном на рис. 76, углы BOC и BAC равны разностям соответствующих углов).

Пусть теперь O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , D — середина стороны BC . Если угол A острый, то $\angle DOC = A$. Из прямоугольного треугольника DOC (рис. 8) получим $\sin A = \frac{DC}{OC}$, откуда

$$\frac{DC}{\sin A} = OC \text{ или } \frac{a}{\sin A} = 2R,$$

где $a = BC$, $R = OC$, R — радиус описанной окружности.

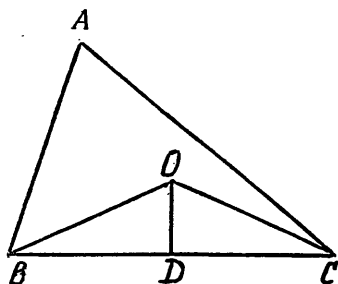


Рис. 8

Самостоятельно разберите случай, когда угол A тупой.

Таким образом, мы доказали справедливость равенств

$$29. (!) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Первые два равенства (без равенства « $=2R$ ») дают нам теорему синусов. Утверждение о том, что радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, представляет из себя частный случай доказанных равенств.

Следует запомнить следующую рекомендацию: задачи, в которых требуется найти радиус окружности, описанной около треугольника, очень часто, можно даже сказать почти всегда, могут быть решены на основании доказанных в задаче 29 равенств. В частности, если нам надо найти радиус окружности, описанной около треугольника с данными сторонами, то решение будет состоять из трех шагов. Сначала по теореме косинусов находим косинус какого-нибудь угла этого треугольника. Затем вычисляем синус этого угла. И, наконец, на основании утверждения задачи 29 (по теореме синусов) находим радиус описанной окружности. При этом удачный выбор угла может облегчить вычисления, а неудачный — затруднить. Например.

30. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$.

Если будем искать косинус угла, противолежащего стороне $\sqrt{7}$, то получим для него значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть этот угол равен 30° , а радиус описанной окружности будет $\sqrt{7}$.

Решите еще несколько задач.

31. Одна сторона треугольника равна 2, прилежащие углы равны 30° и 45° . Найти две оставшиеся стороны этого треугольника.

Ответ: $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ и $2(\sqrt{3}-1)$

32. Пусть основание равнобедренного треугольника равно a , боковые стороны равны b , высота, опущенная на основание, равна h . Выразить радиус описанной около этого треугольника окружности через любые две из трех величин: a , b и h .

$$\text{Ответ: } \left(\frac{b^2}{2h}, \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}, \frac{a^2 + 4h^2}{8h} \right)$$

33. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найти радиус окружности, проходящей через вершины острых углов этого треугольника и середину большего катета.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5\sqrt{13}}{6} \right)$$

34. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найти радиус окружности, проходящей через концы большей стороны и середину меньшей стороны.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{4}{3} \sqrt{\frac{46}{15}} \right)$$

35. На основании BC равнобедренного треугольника ABC взята произвольная точка D . Доказать, что радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников ABD и ACD , равны.

36. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ проведена хорда AB , равная 2. Пусть M — некоторая точка окружности. Чему равен угол AMB ?

$$\text{Ответ: } (45^\circ \text{ или } 135^\circ)$$

37. Хорда AB видна из центра окружности под углом 48° . Пусть M — точка на меньшей дуге AB . Чему равен угол AMB ?

$$\text{Ответ: } (156^\circ)$$

38. Дан квадрат со стороной 1. Найти радиус окружности, проходящей через одну из вершин квадрата, середину одной из сторон, не содержащих этой вершины, и центр квадрата.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right)$$

4. Медианы треугольника. Точка пересечения медиан.

39. (!) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1

(считая от вершины, из которой соответствующая медиана выходит).

Эта важная теорема в последнее время почему-то оказалась вне поля зрения школьных программ и школьных учебников (некоторых).

Приведем одно из возможных доказательств этой теоремы.

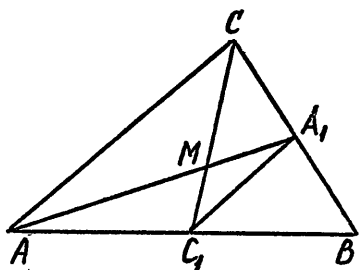


Рис. 9

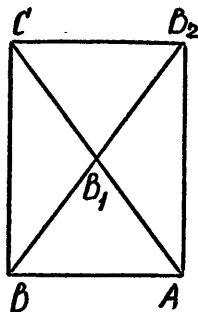


Рис. 10

Пусть AA_1 и CC_1 медианы треугольника ABC (рис. 9), M — точка пересечения AA_1 и CC_1 . A_1C_1 — средняя линия треугольника. По свойству средней линии A_1C_1 параллельна AC и $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$. Треугольники AMC и A_1MC_1 подобны. (Второй признак подобия: $\angle MAC = \angle MA_1C_1$, $\angle AMC = \angle A_1MC_1$). Следовательно, $\frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$. Проведя третью медиану BB_1 , точно также покажем, что точка пересечения AA_1 и BB_1 (а также BB_1 и CC_1) разделит AA_1 (CC_1) в том же отношении 2:1, а это означает, что все три медианы пересекаются в одной точке M и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Заметим, что точку пересечения медиан можно интерпретировать физически — это центр тяжести треугольника. При этом точка M является как центром тяжести (центром масс) системы из трех равных весов, расположенных в вершинах треугольника, так и плоской однородной треугольной пластины.

При решении задач, в которых фигурирует медиана треугольника, очень часто бывает полезным продолжить медиану треугольника за середину стороны на расстояние, равное медиане. При этом вершины исходного треуголь-

ника и полученная точка образуют параллелограмм. Например:

40. Найти углы, образованные медианой BB_1 , выходящей из вершины B треугольника ABC , со сторонами AB и BC , если $AB=6$, $BC=8$, $BB_1=5$.

Решение: Продолжим медиану BB_1 и возьмем на ее продолжении точку B_2 так, что $B_1B_2=BB_1$ (рис. 10). $ABCB_2$ — параллелограмм. Искомые углы равны углам при вершинах B и B_2 треугольника BCB_2 . В нашем случае этот треугольник прямоугольный, поскольку $BC=8$, $B_2C=AB=6$, $BB_2=10$, $10^2=6^2+8^2$. Следовательно, косинусы искомых углов равны 0,6 и 0,8.

Ответ: $\arccos 0,6$; $\arccos 0,8$

Решите следующие задачи.

41. Доказать, что медиана треугольника меньше суммы сторон, ее заключающих.

42. Найти расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его вершин, если стороны треугольника равны 5, 6 и 8.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{142}}{3}, \frac{\sqrt{58}}{3}, \frac{\sqrt{175}}{3}\right)$

43. Пусть S — сумма квадратов сторон треугольника, а Q — сумма квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин этого треугольника. Найти отношение S/Q .

Ответ: (3)

44. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . В каком отношении делит медиану, выходящую из вершины B , прямая, проходящая через C и середину отрезка AM .

Ответ: (8:1)

5. Высоты треугольника. Точка пересечения высот.

45. (!) Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Среди множества доказательств этой важной и красивой теоремы элементарной геометрии, наиболее распространенным и, пожалуй, наиболее изящным является следующее. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам. Получим треугольник $A_1B_1C_1$, для которого стороны треугольника ABC являются средними линиями (рис. 11). Следовательно, высоты треугольника ABC являются средними перпендикулярами к сторонам треугольника

$A_1B_1C_1$, а значит, они пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

Заметим, что использованная нами при доказательстве теоремы 45 конструкция далеко не исчерпала этой теоремы своих возможностей. При ее помощи можно доказать еще целый ряд красивых теорем геометрии треугольника.

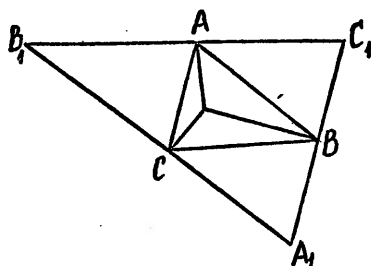


Рис. 11

В научно-популярной литературе точку пересечения высот обычно называют ортоцентром треугольника. Впрочем, мы этот термин использовать не будем. Понятно, что для остроугольного треугольника точка пересечения высот (как и центр описанной окружности) расположена внутри треугольника, а для тупоугольного — вне треугольника. Так же понятно, что

если H — точка пересечения высот треугольника ABC , то A — точка пересечения высот треугольника HBC , и вообще любая из четырех точек A, B, C и H является точкой пересечения высот треугольника, образованного тремя другими точками.

Решим еще несколько задач.

46. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Найти AC , если а) $AA_1=4, BB_1=5, BC=6$; б) $A_1C=8, B_1C=5, BB_1=12$.

Ответ: (а) $\frac{24}{5}$; б) $\frac{104}{5}$

47. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 7 и 8, угол A равен 120° . Найти расстояние от основания высоты, опущенной на сторону AC , до середины стороны BC .

Ответ: $(\frac{1}{2}\sqrt{159})$

48. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABH , где H — точка пересечения высот треугольника ABC , равны.

6. Биссектрисы треугольника. Центр вписанной окружности.

Из различных свойств биссектрисы внутреннего угла треугольника выделим, прежде всего, следующую теорему, возможно, неизвестную нашему читателю.

49. (!) Пусть BB_1 — биссектриса угла B треугольника ABC (B_1 — на стороне AC). Тогда $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$.

Эту теорему иногда формулируют следующим образом: «Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам этого треугольника, заключающим биссектрису».

Вновь, как и при доказательстве теоремы о высотах треугольника (№ 45), ограничимся одним наиболее традиционным рассуждением. Продолжим сторону AB и возьмем на ее продолжении точку D так, что $BD = BC$. (рис. 12). Тогда $\angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DBC) = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle CBB_1$, то есть прямая CD параллельна биссектрисе BB_1 . Следовательно, по теореме об отрезках, образованных при пересечении сторон угла параллельными прямыми, будем иметь: $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось.

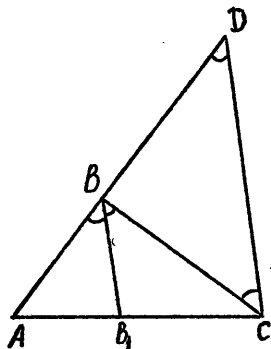


Рис. 12

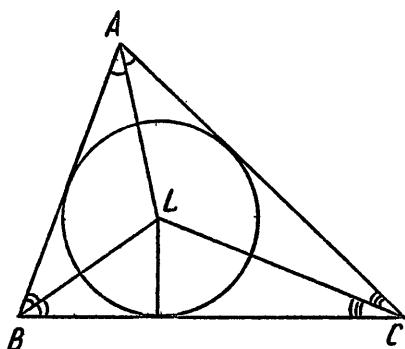


Рис. 13

Как мы знаем из школьного курса, три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник. (Докажите это утверждение. Если забыли, загляните в школьный учебник) Пусть L — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , L — центр вписанной окружности (рис. 13). Полезно запомнить следующее свойство этой точки:

$$\begin{aligned} 50. (!) \quad \angle BLC &= 90^\circ + \frac{1}{2}A, \quad \angle CLA = 90^\circ + \frac{1}{2}B, \\ \angle ALB &= 90^\circ + \frac{1}{2}C. \end{aligned}$$

Доказываются эти равенства весьма просто:

$$\begin{aligned}\angle BLC &= 180^\circ - \angle LBC - \angle LCB = 180^\circ - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ + \frac{1}{2}A.\end{aligned}$$

Известен ряд формул, выражающих r — радиус окружности, вписанной в треугольник, через другие элементы треугольника. Приведем одну из них.

$$51. \quad r = a \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

Докажем эту формулу. По теореме синусов для треугольника BLC , с учетом равенства задачи № 50, найдем

$$\begin{aligned}\frac{BL}{\sin \angle BCL} &= \frac{BC}{\sin \angle BLC}, \quad BL = \frac{BC \cdot \sin \angle BCL}{\sin \angle BLC} = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\sin(90^\circ + \frac{A}{2})} = \\ &= \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}\end{aligned}$$

Поскольку расстояния от точки L , до всех сторон треугольника равны r , то $r = LD = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$. Другую

формулу для r мы приведем в следующем параграфе.

В заключение дадим одну рекомендацию. Если необходимо изобразить треугольник и вписанную в него окружность, то очень часто удобно сначала изобразить окружность, а уж затем треугольник. Впрочем, нередко задачу можно решить, не изображая этой окружности.

Решите следующие задачи.

52. Найти длину биссектрисы прямого угла прямоугольного треугольника с острым углом в 30° и меньшим катетом, равным 1.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} \right)$$

53. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найти:
а) длины отрезков, на которые разделена средняя сторона треугольника биссектрисой противоположного угла;
б) длину биссектрисы к средней стороне этого треугольника.

$$\text{Ответ: (а) 1 и 2; б) } \sqrt{6}$$

54. Найти углы треугольника, если известно, что две

его стороны видны из центра вписанной окружности под углами 102° и 126° .

Ответ: $(24^\circ, 72^\circ, 84^\circ)$

55. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1 . Найти углы этого треугольника, если известно, что $AB = BB_1 = B_1C$.

Ответ: $(72^\circ, 72^\circ, 36^\circ)$

56. Один из углов треугольника равен 60° , противоположная сторона равна 4, один из отрезков, на которые эта сторона разделена опущенной на нее биссектрисой, равен 1. Найти две оставшиеся стороны треугольника.

Ответ: $\left(\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{12}{\sqrt{7}}\right)$

57. Угол B треугольника ABC равен 60° , радиус окружности, описанной около ABC , равен 2. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и C и центр окружности, вписанной в ABC .

Ответ: (2)

58. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найти отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Ответ: (11:7)

59. Выразить сторону правильного треугольника и радиус описанной около него окружности через r — радиус вписанной окружности.

Ответ: $(2r\sqrt{3}, 2r)$

60. Найти стороны треугольника, если известен радиус вписанной в него окружности r и углы α и β , под которыми видны из центра этой окружности две стороны треугольника.

Ответ: $(-r(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta), r(\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha), r(\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta))$

7. Площадь треугольника.

Напомним сначала некоторые наиболее известные формулы для площади треугольника: $S = \frac{1}{2} a h_a$,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

где S — площадь треугольника, h_a — высота, опущенная на сторону a .

На основании теоремы синусов (задача № 29) получаем равенства: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $a = 2R \sin A$. Теперь, заменяя

во второй из данных выше формул для площади сначала b , а затем и a , получим еще две формулы.

$$61. (!) S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}, S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

Полезно также запомнить выражение для площади через r — радиус вписанной окружности и p — полупериметр треугольника.

$$62. (!) S = pr$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим три треугольника ABL , BCL и CAL (рис. 13). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей этих трех треугольников. Следовательно, $S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = pr$, что и требовалось.

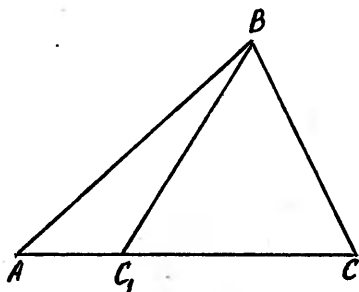


Рис. 14

Легко видеть, что формула 62 верна для любого описанного многоугольника.

Понятно, что если точка C_1 расположена на прямой AC (рис. 14), то отношение площадей треугольников ABC_1 и ABC равно отношению сторон AC_1 и AC , то есть $\frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1}{AC}$.

Этот факт легко обобщается. А именно

63. (!) Пусть точка B_1 расположена на прямой AB , а точка C_1 — на прямой AC , тогда отношение площадей треугольников AB_1C_1 и ABC равно отношению сторон, содержащих вершину A , то есть $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$

Сформулированное в задаче 63 утверждение сразу следует из второй формулы для площади треугольников, поскольку синусы углов с вершиной A в треугольниках AB_1C_1 и ABC равны. Эти углы или равны (рис. 15а) или в сумме составляют 180° (рис. 15б).

Из школьного курса мы знаем также формулу, выражающую площадь треугольника через его стороны, так называемую формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Пожалуй, в практических вычислениях формулой Герона не всегда удобно пользоваться. Во всяком случае, если не все стороны треугольника являются рациональными, то вычисление площади лучше осуществлять в два этапа. Сначала по теореме косинусов находится косинус

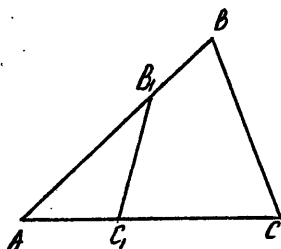


Рис. 15а

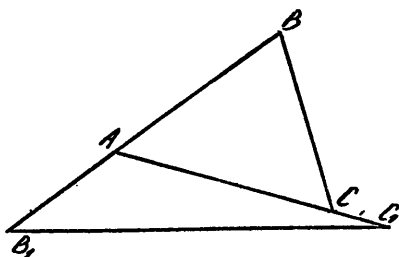


Рис. 15б

какого-либо угла треугольника, затем находится синус этого угла (напомним, он всегда положителен), а потом уже вычисляем площадь треугольника.

Каждая из известных нам формул для площади, кроме прямой задачи — нахождение площади, определяет несколько элементарных задач. Исключение следует сделать для формулы Герона, поскольку многие задачи имеют единственное решение. Так, например, задача определения угла между двумя сторонами треугольника, если известны эти стороны и площадь треугольника, имеет, вообще говоря, два решения: острый и тупой углы (еще имеются две возможности: угол прямой и задача не имеет решения).

Перейдем к задачам.

64. Найти площадь треугольника со сторонами 5, 6 и $\sqrt{7}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}\sqrt{19}\right)$

65. Две стороны треугольника равны 3 и 4, площадь равна $3\sqrt{3}$. Найти третью сторону треугольника.

Ответ: $(\sqrt{13})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

66. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник, если его стороны равны 2, 3 и 4.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)$

67. Площадь треугольника равна 5, две стороны равны 3 и 4. Найти площади треугольников, на которые он делится биссектрисой угла между данными сторонами.

Ответ: $\left(\frac{15}{7}, \frac{20}{7}\right)$

68. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки K , L , M так, что $AK=2KB$, $2BL=3LC$,

$3CM = 4MA$. Площадь треугольника ABC равна 1. Найти площади треугольников AKM , BKL , CLM , KLM .

Ответ: $\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{8}{35}, \frac{2}{7}\right)$

69. Доказать, что медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

70. (!) Выразить площадь правильного треугольника через его сторону.

Ответ: $\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

71. Доказать, что площадь треугольника, одна вершина которого расположена в основании высоты данного треугольника, а две другие в серединах сторон, заключающих высоту, в 4 раза меньше площади данного треугольника.

72. Доказать справедливость равенства $4SR = abc$

73. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найти площадь треугольника с вершинами в основаниях биссектрис данного треугольника.

Ответ: $\left(\frac{210\sqrt{6}}{143}\right)$

8. Четырехугольники.

В школьном курсе изучаются следующие четырехугольники специального вида: трапеция, параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. (К этому списку можно добавить вписанные и описанные четырехугольники). Будем считать, что параллелограмм не является частным случаем трапеции. В большинстве случаев это удобнее. Сформулируем и докажем несколько теорем, приходящих к школьному курсу, полезных при решении задач.

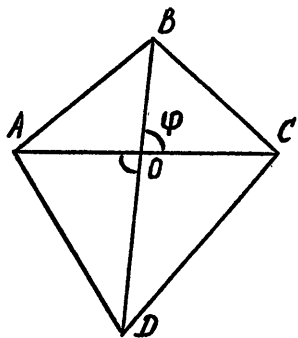


Рис. 16

74. (!) Если d_1 и d_2 диагонали четырехугольника, φ — угол между диагоналями, S — его площадь, то $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Иными словами: площадь произвольного четырехугольника, в том числе и невыпуклого

равна полупроизведению его диагоналей и синуса угла между ними.

В известном смысле теорема 74 представляет собой обобщение формулы для площади треугольника:

$S = \frac{1}{2}ab \sin C$ Доказывается она достаточно просто.

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 16). Высота, опущенная на сторону BD в треугольнике BCD равна $OC \cdot \sin \varphi$, а в треугольнике ABD она равна $OA \cdot \sin \varphi$. Таким образом,

$$S = S_{BCD} + S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2}BD \cdot OA \cdot \sin \varphi = \\ = \frac{1}{2}BD(OC + OA) \sin \varphi = \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi.$$

Полезно запомнить следующее свойство трапеции.

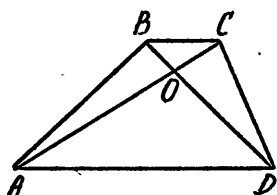


Рис. 17

75. (!) Пусть $ABCD$ трапеция с основаниями AD и BC , O — точка пересечения ее диагоналей. Тогда треугольники ABO и CDO — равновелики. ($S_{ABO} = S_{CDO}$).

Пусть $ABCD$ — четырехугольник. Тогда обратно, из равновеликости треугольников ABO и CDO следует параллельность

AD и BC .

Доказательство. Из параллельности AD и BC следует равновеликость треугольников ABD и ACD (рис. 17), из равновеликости треугольников ABD и ACD следует равновеликость треугольников ABO и CDO ($AD \parallel BC \Leftrightarrow S_{ABD} = S_{ACD} \Leftrightarrow S_{ABO} = S_{CDO}$). Проследивая эту цепочку в обратном направлении, докажем обратное утверждение.

Кстати, в задачах про трапеции очень часто бывает

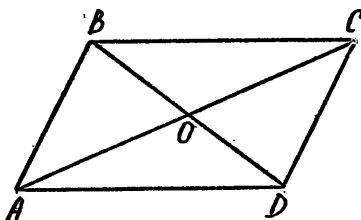


Рис. 18

полезно продолжить до пересечения ее боковые стороны (см. задачу № 78). Из формулы, выражающей длину медианы через стороны треугольника (задача № 12), следует следующее свойство параллелограмма.

76. (!) Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов

его диагоналей.

В самом деле, если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 18), то $BO = \frac{1}{2}BD$ — медиана в треугольнике ABC . Значит, $4BO^2 = 2AB^2 +$

$$+2BC^2 - AC^2, \text{ откуда } AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

Довольно часто встречаются задачи, в которых используется следующее свойство произвольного четырехугольника.

77. (!) Средины сторон произвольного четырехугольника служат вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма соответственно параллельны диагоналям четырехугольника и равны половинам этих диагоналей.

Утверждение этой задачи является следствием свойств средней линии треугольника.

Решите теперь следующие задачи.

78. Найти площадь трапеции, основания которой равны 2 и 1, а углы, прилежащие к большему основанию, равны 30° и 60° .

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)$$

79. Пусть a и b — основания трапеции. Доказать, что отрезок, соединяющий середины ее диагоналей равен $\frac{1}{2}|a-b|$

80. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$. Найти площадь четырехугольника $AMCN$, если площадь параллелограмма равна 6.

$$\text{Ответ: } (2)$$

81. $ABCD$ — прямоугольник, в котором $AB=1$, $BC=2$. На сторонах BC и DA взяты точки M и N так, что $BMDN$ — ромб. Найти сторону ромба.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5}{4} \right)$$

82. Площадь трапеции равна 3, основания 1 и 2. Найти площади треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

83. Доказать, что площадь параллелограмма с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника равна половине площади этого четырехугольника.

84. Доказать, что если отрезки, соединяющие середины сторон данного четырехугольника

а) равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны;

б) перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

85. Пусть M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$, N — точка на стороне AD такая, что $AN=2ND$. В каком отношении отрезок MN делит диагональ AC ?

Ответ: (4:3)

86. Найти отношение оснований трапеции, если известно, что средняя линия делится диагоналями на 3 равные части.

Ответ: (2:1)

87. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны a и b , а угол между диагоналями равен α .

Ответ: $\frac{1}{2}|a^2 - b^2|\operatorname{tg} \alpha$

9. Окружность. Хорды и углы.

Докажем сначала несколько теорем, достаточно часто применяемых при решении различных задач.

88. (!) Доказать, что две дуги окружности, заключенные между двумя параллельными ее хордами, равны между собой.

Справедливость этого достаточно очевидного утверждения следует из симметрии окружности относительно любого ее диаметра (рис. 19). При симметрии относительно диаметра, перпендикулярного параллельным хордам AB и CD , дуги AC и BD совмещаются).

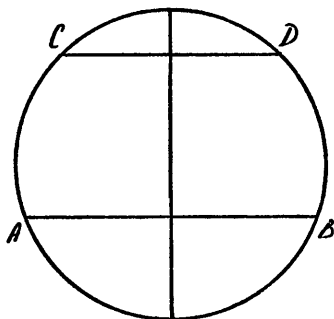


Рис. 19

89. (!) Доказать, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и продолжением его сторон за вершину угла. На рис. 20 стороны угла с вершиной M пересекают окружность в точках A

и B , продолжения этих сторон пересекают окружность в точках A_1 и B_1 . Нам надо доказать, что угол AMB измеряется полусуммой дуг AB и A_1B_1 , то есть, что $\angle AMB$ равен полусумме центральных углов, соответствующих дугам AB и A_1B_1 . Мы знаем, что вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Рассмотрим $\triangle MA_1B$. Угол AMB является внешним углом этого \triangle : $\angle AMB = \angle MA_1B + \angle MBA_1 = \angle AA_1B + \angle B_1BA_1$. В последнюю сумму входят вписанные углы, измеряемые полусуммой дуг AB и A_1B_1 . Наше утверждение доказано.

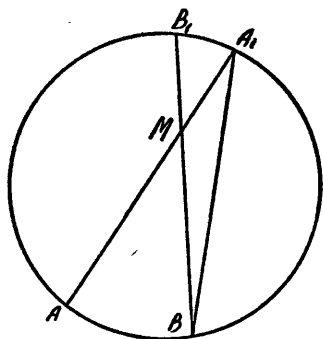


Рис. 20

Докажите самостоятельно, что

90. (!) Угол с вершиной вне круга измеряется полуразностью дуг, заключенных между сторонами угла. (Предполагается, что каждая из сторон пересекается с данной окружностью).

Проведем через точку M , расположенную внутри круга, две хорды AB и CD (рис. 21). Тогда треугольники AMD и CMB подобны (также подо-

бны и треугольники AMC и DMB), равные углы одинаково отмечены на рис. 21 (Этот факт стоит запомнить.) Значит, $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, откуда $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, т. е. произведение отрезков хорды, проходящей через M , на которые хорда делится точкой M , постоянно. Если мы

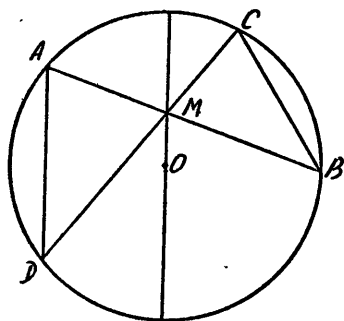


Рис. 21

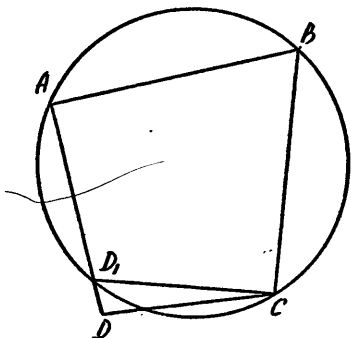


Рис. 22

проведем через M диаметр, то отрезки этого диаметра будут $R + a$ и $R - a$, где R — радиус окружности, a — расстояние M от центра окружности. Произведение отрезков диаметра равно $R^2 - a^2$. Таким образом, мы доказали теорему.

91. (!) Пусть M — точка внутри окружности радиуса R , расположенная на расстоянии a от центра окружности, AB — произвольная хорда, проходящая через M . Тогда $AM \cdot BM = R^2 - a^2$. Из школьного учебника мы знаем, что у вписанного четырехугольника сумма противоположных углов равна 180° . (Это следует из того, что сумма проти-

в противоположных углах вписанного четырехугольника измеряется половиной целой окружности). Верно и обратное утверждение.

92. (!) Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то этот четырехугольник вписанный.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ суммы противоположных углов равны 180° . Опишем около треугольника ABC окружность. Допустим, что точка D не лежит на этой окружности. Обозначим через D_1 точку пересечения этой окружности с прямой AD (рис. 22). Тогда углы AD_1C и ADC равны между собой, поскольку каждый из них дополняет до 180° угол ABC . Получаем, что в треугольнике CDD_1 внешний угол равен внутреннему, с ним несмежному, что невозможно. Значит, точки D и D_1 совпадают.

Аналогично доказывается также, что

93. (!) Если в четырехугольнике $ABCD$ равны углы ABD и ACD , то этот четырехугольник вписанный.

94. В треугольнике ABC угол A равен 32° , угол C равен 24° . Окружность с центром в точке B проходит через A , пересекает AC в точке M , BC — в точке N . Чему равен угол ANM ?

Ответ: (58°)

95. В треугольнике ABC известны стороны $AB=2$, $BC=4$, $CA=3$. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает прямую AC в точке M , а прямую AB в точке N . Известно, что $AM=1$, $CM=4$. Найти NM и AN .

Ответ: $(2, \frac{3}{2})$

96. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M , прямые AB и CD пересекаются в точке N . Известно, что $\angle AMD=108^\circ$, $\angle AND=24^\circ$. Найти $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

Ответ: $(66^\circ, 42^\circ)$

97. Около треугольника со сторонами 5, 6 и 7 описана окружность. Найти длину хорды этой окружности, отличной от стороны треугольника, проходящей через одну его вершину и делящей пополам среднюю по длине сторону треугольника.

Ответ: $(\frac{37}{2\sqrt{7}})$

98. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы $\angle ADC=96^\circ$, $\angle BAC=54^\circ$, $\angle ACB=42^\circ$. Чему равен $\angle BDC$?

Ответ: (54°)

99. Пусть M — точка на диаметре AB окружности с центром в O . C и D — точки окружности, расположенные по одну сторону от AB , причем $\angle CMA = \angle DMB$, $\angle CMD = \alpha$. Чему равен угол COD ?

Ответ: (α)

100. Пусть AB диаметр окружности, C — некоторая точка плоскости. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность в точках M и N соответственно. Прямые MB и NA пересекаются в точке K . Чему равен угол между прямыми CK и AB ?

Ответ: (90°)

10. Окружности и касательные. Площадь круга и его частей.

Сформулируем и докажем сначала две теоремы. Первая из них продолжает тему задач №№ 89, 90, являясь в известном смысле их частным, а вернее, предельным случаем.

101. (!) Проведем через некоторую точку окружности хорду и касательную к окружности. Тогда каждый из двух углов, образованных этими хордой и касательной, измеряется половиной дуги, заключенной внутри соответствующего угла.

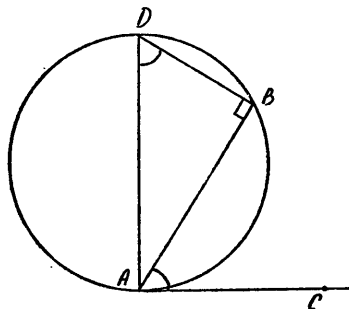


Рис. 23

Доказательство. Пусть AB — хорда окружности, AC — касательная, AD — диаметр (рис. 23). $\angle BAC = \angle BDA$, поскольку каждый из этих углов дополняет до 90° угол BAD . Следовательно, угол BAC , как и вписанный угол BDA , измеряется половиной дуги

AB , заключенной внутри угла BAC .

Следующая теорема 102 по формулировке и доказательству аналогична теореме 91.

102. (!) Пусть M — точка, расположенная вне окружности радиуса R , на расстоянии a от ее центра. Произвольная секущая, проходящая через M , пересекает окружность в точках A и B , MC — касательная к окружности (C — точка касания). Тогда

$$MA \cdot MB = MC^2 = a^2 - R^2.$$

Доказательство. Утверждение следует из подобия треугольников MCA и MBC (равенство углов MCA и MBC

следует из теоремы 101, рис. 24). Имеем $\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$. Откуда $MA \cdot MB = MC^2 = a^2 - R^2$. Последнее равенство получено из треугольника $МОС$ на основании теоремы Пифагора.

Аналогом теоремы 92 для вписанного четырехугольника является теорема 103 для описанного четырехугольника.

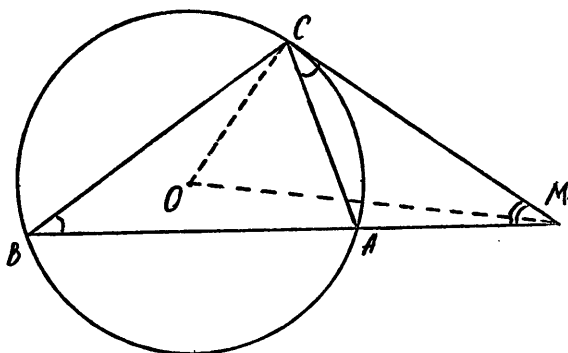


Рис. 24

103. (!) Если $ABCD$ — описанный около некоторой окружности четырехугольник, то $AB + CD = BC + DA$.

Обратно, если для выпуклого четырехугольника выполняется равенство $AB + CD = BC + DA$, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Первая часть нашего утверждения следует из равенства касательных, проведенных к окружности из одной точки. Пусть касательные к окружности, вписанной в $ABCD$, проведенные соответственно из вершин A, B, C и D , равны a, b, c и d (рис. 25а). Тогда $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + DA = b + c + d + a$, то есть $AB + CD = BC + DA$.

Обратное утверждение, как обычно, доказывается от противного. Проведем биссектрисы углов A и D четырехугольника $ABCD$ и обозначим через O точку их пересечения (рис. 25б). Точка O равноудалена от сторон AB и AD , а также от сторон AD и DC , и мы можем построить окружность с центром O , касающуюся этих сторон. Пусть суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны, но построенная окружность не касается стороны BC . Проведем через C касательную к окружности, отличную от CD , и обозначим через B_1 точку пересечения этой касательной с прямой AB . Четырехугольник AB_1CD явля-

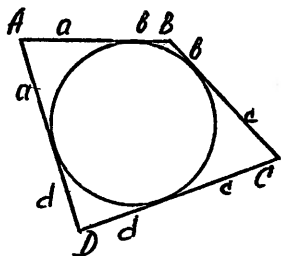


Рис. 25а

ется описанным, следовательно $AB_1 + CD = B_1C + DA$. По условию $AB + CD = BC + DA$. Вычитая друг из друга эти два равенства, получим $BB_1 = |BC - B_1C|$, то есть в треугольнике CBV_1 разность двух сторон равна третьей стороне. Это невозможно. Значит, точки B и B_1 должны совпадать.

Замечание. Можно предложить и иное, прямое рассуждение. Отложим на AD отрезок $AM = AB$ (для удобства полагаем $AD > AB$), а на

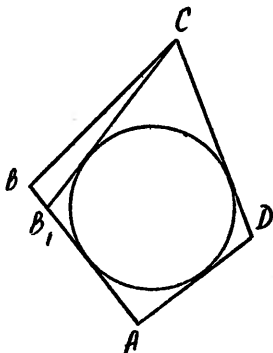


Рис. 25б

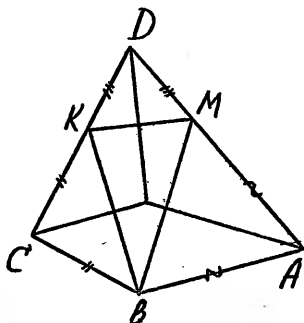


Рис. 25в

CD отложим $CK = BC$ (рис. 25в). Из равенства $AB + CD = AD + BC$ следует, что $MD = AD - AB = CD - BC = KD$. Теперь биссектрисы углов A , C и D нашего четырехугольника будут срединными перпендикулярами к сторонам треугольника BMK , значит, они пересекаются в одной точке — центре описанной около BMK окружности. Точка эта, как легко видеть, равноудалена от всех сторон четырехугольника $ABCD$.

В заключение этого раздела напомним формулы, выражающие длину дуги окружности, а также площади круга и его частей.

Длина окружности $L = 2\pi r$. Длина дуги, которой соответствует центральный угол величины α (в радианной мере), вычисляется по формуле $l = r\alpha$. Площадь круга: πr^2 , площадь сектора $S = \frac{1}{2}r^2\alpha$, площадь сегмента, соответствующего дуге (центральному углу) лучше всего представить в виде разности площадей сектора и равно-

бедренного треугольника с боковыми сторонами, равными r и углом между ними α . Значит $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin \alpha)$

Напомним примечание, сделанное в свое время к задаче № 62. Площадь любого описанного многоугольника, в частности четырехугольника, можно находить по формуле $s = pr$, где p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

104. Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями 5 и 3. Найти радиус окружности.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$

105. Из точки, расположенной вне окружности, проведены касательная и секущая. Длина касательной равна 6. Секущая высекает на окружности хорду длиной 5. Найти длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.

Ответ: (4)

106. Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках K и M . Доказать, что треугольники ABC и AMK подобны. Найти MK и AM , если $AB=2$, $BC=4$, $CA=5$, $AK=1$.

Ответ: $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

107. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

108. Около окружности радиуса 1 описана равнобокая трапеция с боковой стороной, равной 3. Найти площадь трапеции.

Ответ: (6)

109. Около окружности описана трапеция. Доказать, что концы боковой стороны трапеции и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Доказать, что произведение отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.

110. К окружности проведены касательные, касающиеся ее в концах диаметра AB . Произвольная касательная к окружности пересекает эти касательные соответственно в точках K и M (AK и BM — касательные к окружности). Доказать, что произведение $AK \cdot BM$ постоянно.

111. На сторонах AB и AC квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK=4AM=AB$. Доказать, что прямая KM касается окружности, вписанной в квадрат.

112. Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 и острым углом 30° . Найти площадь общей части двух кругов, проходящих через вершину прямого угла с центрами в вершинах острых углов треугольника.

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

113. На катетах прямоугольного треугольника, как на диаметрах построены круги. Доказать, что сумма площадей частей этих кругов, расположенных вне описанного около треугольника круга, равна площади треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ.

11. Многогранники.

При решении стереометрических задач требования к качеству чертежа, его наглядности возрастают по сравнению с задачами планиметрическими. Мы не научимся решать сколько-нибудь содержательные стереометрические задачи, если не освоим азбуку построения пространственного чертежа. Сюда входит: выбор оптимального положения изображаемого тела (в частности, выбор ориентации — верх и низ, право и лево), выбор ракурса и проекции, умение минимизировать количество изображенных линий (напомним, что видимые и невидимые линии должны изображаться различным образом), умение строить сечения и проекции на плоскость, умение выделить на пространственном чертеже и соответственно изобразить плоскую конфигурацию, дающую ключ к решению задачи.

Легче всего «поддаются» изображению многогранники, и прежде всего, треугольные и четырехугольные правильные призмы и пирамиды. Выделим два основных типа задач в связи с указанными многогранниками. Первый тип: задачи на вычисление элементов — длин, площадей, объемов, линейных и двугранных углов — указанных многогранников. Второй тип: задачи на сечения.

Начнем с задач первого типа.

Перечислим основные элементы правильных призм и пирамид. Линейные: сторона основания, боковое ребро, апофема боковой грани (для пирамид), радиусы окружностей, вписанных или описанных по отношению к основанию, радиус описанного около многогранника шара, радиус вписанного шара (для призм этот шар не всегда существует) и т. д. Площади: основания (или оснований), боковой поверхности, полной поверхности. Объем многогранника. Угловые: линейные углы при вершине, двугранные при основании или между боковыми гранями. Правильная призма или пирамида задается величинами

двух независимых элементов. (В частности эти два элемента не могут быть углами.) Таким образом, возникает достаточно обширная серия простейших (почти элементарных) задач: по двум данным величинам найти третью. Например.

1. Найти объем правильной треугольной призмы, полная поверхность которой равна $8\sqrt{3}$, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$.

В нарушение нашего принципа при решении этой задачи обойдемся без чертежа. Если a — сторона основания данной призмы, то площадь одного основания будет $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а полная поверхность $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a\sqrt{3}$. Получаем для a уравнение $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, из которого найдем $a=2$. Объем призмы равен 3.

2. (!) Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , а двугранный угол между соседними боковыми гранями равен α .

Решение. На рис. 26 изображена правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Построим линейный угол двугранного угла между соседними боковыми гранями. Для этого опустим из вершин B и D перпендикуляры на ребро SC . Поскольку пирамида правильная, то основания

этих перпендикуляров совпадут (точка K). Угол DKB является линейным углом между плоскостями SDC и SBC , $\angle DKB = \alpha$.

Теперь составим план решения. Последовательно находим: DB , OK (из равнобедренного треугольника DKB),

$$\sin \alpha = \frac{OK}{OC}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}},$$

$h = SO = OC \operatorname{tg} \varphi$ (Из прямоугольного треугольника SOC), и наконец, находим объем пирамиды.

Теперь реализуем этот план:

$$DB = a\sqrt{2},$$

$$OK = OB \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\sin \alpha = \frac{OK}{OC} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

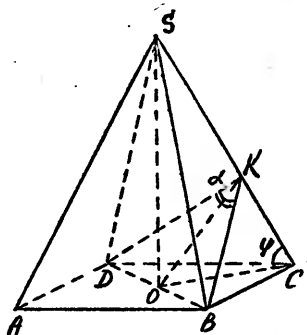


Рис. 26

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos \alpha}},$$

$$h = a \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos \alpha}}$. (Обращаем внимание, должно быть $\alpha > 90^\circ$).

3. (!) Найти радиус вписанного и радиус описанного шара для треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h .

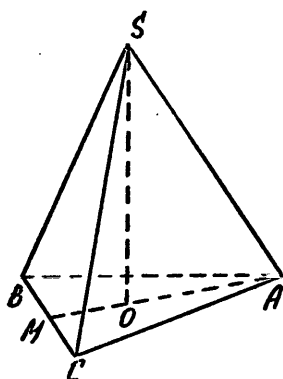


Рис. 27а

Решение. Пусть O — центр основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$, M — середина BC (рис. 27а). AM — высота в треугольнике ABC , $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Очевидно, что центры обоих шаров находятся на прямой SO . Найдем сначала радиус описанного шара. Для этого продолжим SO до пересечения с описанным шаром в точке D . (рис. 27б). Очевидно, SD — диаметр этого шара, $\angle SAD = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике SAD известны вы-

сота AO , опущенная на гипотенузу, и отрезок гипотенузы SO . Из формул задачи № 14 найдем $OD = \frac{AO^2}{SO} = \frac{a^2}{3h}$. Таким образом, если R — радиус описанного шара, то $2R = SD = SO + OD = h + \frac{a^2}{3h} = \frac{3h^2 + a^2}{3h}$.

Для нахождения r — радиуса вписанного шара рассмотрим треугольник SOM (рис. 27в). Если Q — центр вписанного шара, то QM — биссектриса угла SMO и $QO = r$. В прямоугольном треугольнике SMO известны катеты $SO = h$ и $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Находим гипотенузу

$SM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$. По теореме о биссектрисе внутреннего угла (задача № 49) имеем $\frac{OQ}{SQ} = \frac{OM}{SM}$,

$$\frac{r}{h-r} = \frac{a\sqrt{3}}{6\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}, \text{ откуда } r = \frac{a h}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$$

Ответ: радиус описанного шара равен $\frac{3h^2 + a^2}{6h}$, радиус вписанного шара равен $\frac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$.

Уже на этих примерах, особенно на последнем, мы видим, что решение планиметрических задач очень часто (практически, всегда), сводится к решению одной или нескольких планиметрических задач.

Следующий тип задач — задачи на сечения. В основе этих задач лежит умение построить сечение многогранни-

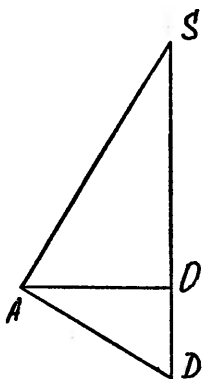


Рис. 276

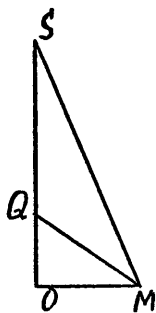


Рис. 27в

ка плоскостью и определить вид этого сечения. Здесь мы рассмотрим лишь задачи, в которых сечение задано или тремя точками, или двумя точками и прямой, параллельной плоскости сечения, или точкой и прямой, или двумя пересекающимися (параллельными) прямыми, или точкой и параллельной плоскостью. В принципе возможны и нередко встречаются задачи, в которых сечение задано иным, более «хитрым» способом.

4. (!) Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер куба и наиболее удаленную от соединяющей их прямой вершину куба.

Найти площадь этого сечения, если ребро куба равно 1.

Основная схема, которой обычно следует придерживаться при построении сечения, состоит в последовательном построении прямых, по которым плоскость сечения

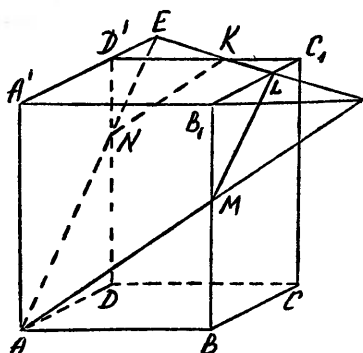


Рис. 28

пересекается с плоскостями грани данного многогранника или же с какими-то вспомогательными плоскостями.

Пусть K и L — середины ребер D_1C_1 и C_1B_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 28). Наиболее удаленной от прямой KL вершиной является очевидно вершина A . Плоскость сечения пересекается с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ по прямой KL .

Продолжим KL до пересечения с прямыми A_1D_1 и A_1B_1 в точках E и F . (В этом продолжении — все дело. Прием этот стандартный. Запомните его.) Точка E принадлежит плоскости ADD_1A_1 . В этой же плоскости расположена еще одна точка нашего сечения — точка A . Следовательно, плоскость сечения пересекается с плоскостью ADD_1A_1 по прямой AE . Обозначим через N — точку пересечения этой прямой с ребром DD_1 . Вновь имеем в плоскости грани, на сей раз грани DCC_1D_1 , две точки, принадлежащие нашему сечению, — K и N . Строим отрезок KN , являющийся стороной многоугольника сечения. Аналогично находится точка M . Окончательно получаем, что нашим сечением является пятиугольник $KLMAN$. Найдем его площадь. Эту площадь можно представить в виде разности площадей: из площади треугольника AEF вычитаются площади двух, очевидно равных, треугольников NKE и MLF . Более того, два последних треугольника подобны треугольнику AEF с коэффициентом $\frac{1}{3}$ ($\frac{EK}{EF} = \frac{LF}{EF} = \frac{1}{3}$). Значит, их площади в 9 раз меньше площади треугольника AEF , а площадь искомого пятиугольника составляет $\frac{7}{9}$ площади треугольника AEF . Осталось найти площадь треугольника AEF . Последовательно найдем: $D_1E = D_1K = B_1L = B_1F = \frac{1}{2}$,

$$A_1E = A_1F = \frac{3}{2}, EF = \frac{3}{2}\sqrt{2}, AE = AF = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Таким образом AEF — равнобедренный треугольник с ос-

нованием $EF = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ и боковыми сторонами $AE = AF = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Его площадь равна $\frac{3\sqrt{17}}{8}$.

Ответ: площадь сечения равна $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

(Чтобы не удлиннять наше решение, мы опустили многие элементы полного обоснования. Например, почему треугольники ENK и EAF подобны).

5. Найти объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 3, а полная поверхность $9\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(\frac{27\sqrt{2}}{8}\right)$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани попарно перпендикулярны. Найти плоские углы при вершине, в которой сходятся боковые ребра.

Ответ: $(\text{Arc cos } \frac{1}{3})$.

7. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанного шара принадлежит плоскости основания. Во сколько раз радиус вписанного шара меньше радиуса описанного шара?

Ответ: $(\sqrt{2} + 1)$.

8. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник. Известно, что существует шар, вписанный в эту призму, и шар, около нее описанный. Найти отношение радиусов этих шаров.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

9. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 1. Найти площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1 , A_1B_1 и AC .

Ответ: $\frac{7\sqrt{26}}{72}$.

10. Найти объем многогранника $ABCDKL$, в котором $ABCD$ прямоугольник со сторонами a и b , KL параллельна AB , удалена от плоскости $ABCD$ на расстояние h и равна c .

Ответ: $\left(\frac{1}{6}bh(2a + c)\right)$.

11. Доказать, что если какая-то высота пирамиды проходит через точку пересечения высот противоположной грани, то и любая другая высота обладает этим же свойством.

(Докажите, что из условия следует попарная перпендикулярность противоположных ребер, а из попарной перпендикулярности ребер следует, что любая высота пирамиды проходит через точку пересечения высот соответствующей грани.)

12. Круглые тела. Цилиндр, конус, шар.

По сравнению с многогранниками круглые тела труднее поддаются изображению. Особенно это относится к шару. В самом деле, изображением шара (в ортогональной проекции) будет круг, «увидеть» в котором пространственное тело при отсутствии каких-то пространственных связей нелегко. Поэтому шар, а тем более шары, при решении стереометрических задач обычно не изображают. Скажем даже, что мы не знаем ни одной задачи, в которой фигурирует два или более шаров и в которой хороший чертеж, служащий подспорьем в решении, а не затрудняющий решение, требовал изображения этих шаров. С другой стороны, многие задачи на перечисленные в заглавии круглые тела очевидным образом и сразу сводятся к планиметрическим задачам. Так, например, определение радиуса шара, вписанного в заданный конус или описанного около него, сводится к определению радиуса окружности, соответственно вписанной в равнобедренный треугольник или описанный около этого треугольника.

Напомним основные понятия и параметры, связанные с цилиндром. Основные понятия: основание, радиус основания, ось, высота, образующая, осевое сечение, боковая и полная поверхности. Соответственно параметры: радиус основания, площадь основания, высота (равна образующей), площадь осевого сечения, площади боковой и полной поверхности, площадь осевого сечения, объем цилиндра. Любые два из перечисленных параметров, кроме пары площадь осевого сечения и площадь боковой поверхности, задают цилиндр.

Для конуса добавляются угловые понятия и соответственно угловые величины: угол наклона образующей конуса к плоскости основания и угол при вершине осевого сечения, то есть угол между двумя диаметрально противоположными образующими. Поскольку два указанных угла являются углами равнобедренного треугольника, получающегося в осевом сечении конуса, между ними имеет место очевидная связь. (Какая?) Как и цилиндр, конус

задается двумя параметрами, причем имевшее место ограничение снимается.

12. Цилиндр и конус имеют равные основания, равные площади полной поверхности и равные объемы. Найти отношение их боковых поверхностей.

Решение: Обозначим радиус основания и высоту цилиндра через r и h . По условию радиус основания и высота конуса r и $3h$ (То, что высота конуса в 3 раза больше высоты цилиндра, следует из равенства площадей оснований и объемов конуса и цилиндра). Если l — образующая конуса, то $l = \sqrt{r^2 + 9h^2}$. Боковая и полная поверхности цилиндра: $S_{\text{бок.ц}} = 2\pi rh$, $S_{\text{пол.ц}} = 2\pi r(r+h)$.

Конуса: $S_{\text{бок.к}} = \pi rl$, $S_{\text{пол.к}} = \pi r(r+l)$. По условию $S_{\text{пол.ц}} = S_{\text{пол.к}}$, откуда $r+2h=l$. Заменяя l через r и h , после возведения в квадрат и упрощений, получим $h = \frac{4}{5}r$. Далее находим, $l = \frac{13}{5}r$, $S_{\text{бок.ц}} = \frac{8}{5}\pi r^2$,

$S_{\text{бок.к}} = \frac{13}{5}\pi r^2$. Отношение равно $\frac{8}{13}$.

13. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Через вершину конуса проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β . Найти площадь получившегося сечения, если площадь осевого сечения равна S .

Решение: на рис. 29 а, б и в изображены: общий вид конуса с проведенными сечениями SBC , осевое сечение и основание конуса. D — середина хорды BC . По условию $\angle SDO = \beta$. Пусть l — образующая конуса. Тогда площадь осевого сечения равна $\frac{1}{2}l^2 \sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2}l^2 \sin 2\alpha$.

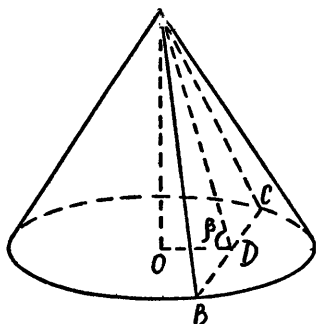


Рис. 29а

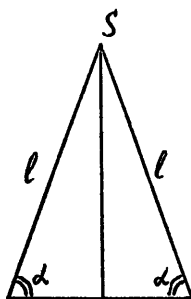


Рис. 29б

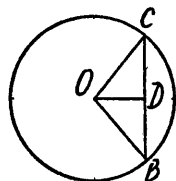


Рис. 29в

По условию $S = \frac{1}{2}l^2 \sin 2\alpha$, $l^2 = \frac{2S}{\sin 2\alpha}$. Далее,

$SO = h = l \cdot \sin \alpha$, $OC = OB = r = l \cos \alpha$,

$$OD = SO \operatorname{ctg} \beta = l \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta, \quad SD = \frac{SO}{\sin \beta} = \frac{l \sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = l \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} BC \cdot SD = BD \cdot SD = \frac{l^2 \sin \alpha}{\sin \beta} \times \\ \times \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta} = \frac{S}{\cos \alpha \sin \beta} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

Полученное выражение можно преобразовать к виду $\frac{S}{\cos \alpha \sin^2 \beta} \times \sqrt{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}$.

14. (!) Через ось конуса проведены две перпендикулярные между собой плоскости. Найти радиус шара, вписанного в одну из четырех образовавшихся частей, если радиус основания конуса равен r , а угол наклона образующих к плоскости основания равен α .

Решение: Если x — радиус искомого шара, то расстояние от его центра до центра основания конуса равно $x\sqrt{3}$. В самом деле, пусть проведенные плоскости и плоскость основания конуса являются координатными плоскостями (осями являются линии пересечения этих плоскостей). При соответствующем выборе направления осей центр шара Q будет иметь координаты (x, x, x) . Проведем сечение через центр шара и ось конуса (рис. 30 а, б, на рис. 30 б изображен треугольник SOA , представляющий собой «половину» этого сечения). D — точка касания шара с плоскостью основания, $\angle QAD = \frac{\alpha}{2}$,

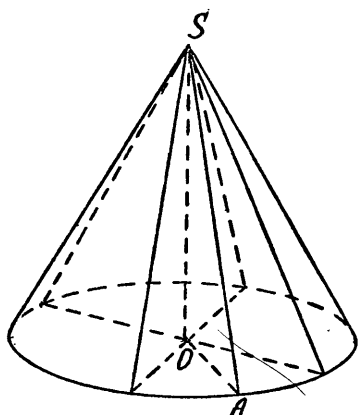


Рис. 30а

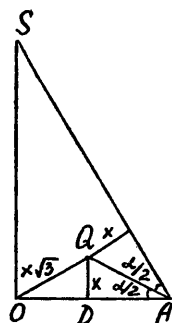


Рис. 30б

$DA = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $OD = x\sqrt{2}$ Поскольку $OD + DA = r$, то $x(\sqrt{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}) = r$

Ответ: $\frac{r}{\sqrt{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$.

15. Полная поверхность конуса в 3 раза больше площади его основания. Найти угол при вершине осевого сечения этого конуса.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

16. Разверткой боковой поверхности конуса является полукруг, а разверткой боковой поверхности цилиндра является квадрат, равновеликий полукругу. Какое из тел, конус или цилиндр, имеет больший объем и во сколько раз?

Ответ: $\left(\frac{V_u}{V_k} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)$

17. В конус, осевое сечение которого — правильный треугольник, вписан шар, а в шар вписан цилиндр, осевое сечение которого квадрат. Найти отношение объемов конуса и цилиндра.

Ответ: $(3\sqrt{2})$

18. Внутри конуса находятся 4 шара одинакового радиуса R , каждый шар касается двух других, основания конуса и его боковой поверхности. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Найти высоту конуса:

Ответ: $\left(R \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2})\right)$

19. Одна грань куба вписана в основание конуса, а все ребра противоположной грани касаются боковой поверхности этого конуса. Найти объем конуса, если ребро куба равно a .

Ответ: $\left(\frac{\pi(2+\sqrt{2})}{6}a^3\right)$

20. Найти объем тела, получающегося при вращении единичного квадрата вокруг прямой, проходящей через одну из вершин квадрата, наклоненной к его плоскости под углом α и перпендикулярной диагонали квадрата, не содержащей этой вершины.

Ответ: $\left(\frac{\pi \cos \alpha}{3\sqrt{2}}\right)$

II. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Найти площадь прямоугольного треугольника, один катет которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

2. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найти площадь треугольника BCK , если $AB=1$, $CA=b$.

3. В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB=1$, $BC=a$. Найти AC .

4. Найти периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности длиной 2 удалена от ее центра на расстояние 3.

5. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Точка M делит сторону CD в отношении $1:2$, считая от точки C , K — середина AD . Какой из отрезков больше: BK или AM ?

6. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $A > B > C$. К какой из вершин треугольника ближе всего находится центр вписанной окружности?

7. В треугольнике ABC угол C равен 60° , радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D такая, что $\angle ADB=45^\circ$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABD .

8. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 7 и 24. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

9. Найти площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его сторон, равны 2 и 3, а угол между ними 45° .

10. Доказать, что средняя линия равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна ее боковой стороне.

11. В треугольнике ABC стороны равны $AB=\sqrt{17}$, $BC=4$, $CA=5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD=1$. Найти угол ADB .

12. ABC — равнобедренный треугольник с основанием

AC , O и I — соответственно центры описанной и вписанной окружности. Найти углы треугольника AOI , если:

а) $\angle B = 80^\circ$;

б) $\angle B = 100^\circ$.

13. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружности прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

14. В окружности радиуса 1 проведена хорда длины 1. Найти площади частей круга, на которые данный круг разделен проведенной хордой.

15. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса прямого угла CD , острый угол B равен 30° . Найти углы треугольника DH_1H_2 , где H_1 и H_2 — точки пересечения высот треугольников ACD и BCD .

16. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $AM = 2MB$, а на стороне AC точка K . Известно, что площадь треугольника AMK в два раза меньше площади треугольника ABC . В каком отношении точка K делит сторону AC ?

17. Найти углы треугольника ABC , если известно что медиана и высота, выходящие из вершины B , делят $\angle ABC$ на три равные части.

18. Найти площадь общей части двух кругов, один из которых вписан в квадрат со стороной a , а другой имеет центр в одной из вершин квадрата, и окружность, его ограничивающая, содержит ближайшую к этой вершине точку касания со сторонами квадрата первого круга.

19. Расположить в порядке возрастания площади правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника и круга, если известно, что периметры многоугольников равны между собой и равны длине окружности.

20. Сторона правильного шестиугольника равна a . Середины трех его сторон, взятых через одну, являются вершинами треугольника. Найти площадь этого треугольника.

21. Через точку M , расположенную на расстоянии 1 от центра окружности радиуса 2 проведена хорда AB , равная 3,5. Найти отрезки этой хорды AM и MB .

22. В квадрат вписана окружность, в окружность вписан правильный треугольник, в треугольник вновь вписана окружность, в получившуюся окружность вписан квадрат. Во сколько раз площадь последнего квадрата меньше площади исходного квадрата?

23. Из точки A , расположенной вне окружности, проведена касательная, длина которой равна 2, и секущая,

высекающая на окружности хорду длиной 1. Найти отрезок секущей, расположенной вне окружности.

24. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найти $\angle CAD$.

25. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше окружности, в него вписанной. Найти углы при основании этого треугольника.

26. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

27. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $BK = KM = MA$. В каком отношении точка K делит гипотенузу AB , если $\angle BAC = 60^\circ$?

28. Дан угол величиной α с вершиной в точке A . Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки B на стороны угла, равно a . Найти AB .

29. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найти расстояние от точки E до центра ромба.

30. Дан треугольник ABC . Сколько найдется таких точек, что треугольники ABM , BMC и CAM равновелики?

31. Найти отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α .

32. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке O взяты две точки A и B , причем $OA = a$, $OB = b$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

33. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна C , а один из острых углов равен 30° . Найти радиус окружности с центром в вершине угла в 30° , делящей данный треугольник на две равновеликие части.

34. В прямоугольном треугольнике медиана равна m и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найти площадь треугольника.

35. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое его диагоналей.

36. Диагонали четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найти площадь четырехугольника.

37. Около окружности описана равнобокая трапеция с боковой стороной, равной l , одно из оснований трапеции равно a . Найти площадь трапеции.

38. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Найти площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2 .

39. В трапеции $ABCD$ известны $AB=a$, $BC=b$ ($a \neq b$). Определить, что пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?

40. Дан полукруг с диаметром AB . Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB ?

41. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Одно из оснований в 2 раза больше другого. Площадь одного треугольника, прилежащего к боковой стороне, равна 2. Найти площадь трапеции.

42. МГПИ им. В. И. Ленина, 1988 г., химфак, № 5 (из 5).

Найти площадь треугольника, если его основание равно a , а углы при основании равны 30° и 45° .

43. МГПИ им. В. И. Ленина, 1988 г., физич. факультет, № 2 (из 5).

В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса 1 см. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите стороны треугольника.

44. ГГУ, 1988 г., химфак, № 4

Найти угол A треугольника ABC , если заданы длины его сторон $|AC|=b$, $|AB|=c$ и длина l биссектрисы внутреннего угла A .

45. ГГУ, 1988 г., факультет ВМК, № 4 (из 4).

Определить углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, делят соответствующий угол на 4 равные части.

46. МИРЭА, 1988 г., № 5 (из 6).

В равнобокой трапеции лежат две касающиеся окружности радиуса R , каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найти стороны трапеции.

47. МИРЭА, 1988 г., № 5 (из 6).

В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C , равны соответственно 36 и 15. Найти третью медиану.

48. МИЭМ, 1988 г., № 5 (из 5).

Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника?

49. МАИ, 1988 г., № 4 (из 6).

Площадь прямоугольного треугольника равна P , а площадь круга, вписанного в него, равна Q . Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

50. МАИ, 1988 г., № 6 (из 6).

На координатной плоскости заданы точки $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(4, 0)$. Найдите координаты (x, y) точки M такой, что угол OMA равен углу CMB , а угол MAO равен углу MBC .

51. ЛЭТИ, 1987 г., № 2 (из 3).

В треугольнике ABC угол A равен α , $AB=AC=1$. Пусть S — площадь треугольника ABC ,

а) Докажите, что $g(\alpha)=4(2-\cos \alpha)/\sin \alpha$

б) Решите уравнение $g(\alpha)=4\sqrt{3}$

в) Найдите наименьшее значение функции g .

52. ЛЭТИ, 1987 г., № 2 (из 3) В. 2.

В треугольник ABC вписана окружность радиуса 1. Известно, что угол C равен $\frac{\pi}{3}$, угол B равен α . Через $S(\alpha)$ обозначим площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной окружности.

а) Докажите, что $S(\alpha)=\frac{3}{4}\sin \alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos \alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

б) Найдите область значений функции S .

в) Постройте график функции S .

53. НГУ, 1987 г., № 3 (из 5), В. 3.

При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

54. МИРЭА, 1987 г., № 5 (из 6), В. 2.

В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и AE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE , если $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$.

55. МИРЭА, 1987 г., № 5 (из 6).

В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED , если $AB=6$, $AC=5$, $CB=7$.

56. МЭИ, 1987 г., № 5 (из 6).

В круге дана точка на расстоянии 15 см от центра; через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части 7 см и 25 см. Найдите длину радиуса круга.

57. МАИ, 1987 г., № 6 (из 8).

Длины меньшей диагонали ромба, стороны и большей диагонали являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите величины углов ромба.

58. МАИ, 1987 г., № 5 (из 8).

В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN , причем $AM:CM=2:3$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC , если острый угол BAC равен α .

59. ЛГУ, 1987 г., географ. и геолог. факультеты, № 4 (из 5).

Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2 см, а гипотенуза — 13 см.

60. ЛГУ, 1987 г., отд. мат. лингв. филологического факультета, № 4 (из 5).

Вне квадрата $ABCD$ дана точка O . Найдите площадь квадрата, если известно, что $OA=OB=5$, $DO=\sqrt{13}$.

61. ЛГУ, 1987 г., биолого — почв. факультет, № 4 (из 5).

В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h . Найдите площадь трапеции.

62. ЛГУ, 1987 г., № 4 (из 5), химфак.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE . Найдите длину высоты AE , если известно, что $AD=BC=4$, $AB=6$.

63. ЛГУ, 1987 г., факультеты психологич. и экономич., № 4 (из 5).

Около прямоугольного треугольника описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояния от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямого угла треугольника, равны a и b .

64. ЛГУ, 1987 г. факультеты мехмат, физический, прикладной математ.-процессов управления, № 4 (из 5).

Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).

65. НГУ, 1987 г., № 3 (из 5).

Из точки A к окружности радиуса R проводится касательная, которая касается окружности в точке M . Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках K и L , причем L — середина отрезка AK , угол AMK равен 60° . Найдите площадь треугольника AMK .

66. НГУ, 1987 г., № 3 (из 5).

Две окружности радиуса 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окруж-

ности в точках C и D так, что $CD=8$ и B лежит между C и D , $B \neq C \neq D$. Найдите площадь треугольника ACD .

67. НГУ, 1988 г., экон. факультет, № 3 (из 5).

В тупоугольном треугольнике ABC площади $24\sqrt{5}$ медианы AN , CM пересекаются под углом $\arccos \frac{2}{3}$. Найдите стороны треугольника, если $AN - CM = 3$.

68. НГУ, 1988 г., геолого — геофизич. факультет, № 3 (из 5).

Прямоугольный треугольник ABC с катетами AC , BC , имеющими длину 3 и 2 соответственно, вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B , C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A . Найдите площадь квадрата.

69. НГУ, 1988 г., факультет естеств. наук, № 3 (из 5).

Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=5$, $BC=12$ описана окружность. Точки E , G — середины меньших дуг $\cup AC$, $\cup BC$ этой окружности, точка F — середина дуги $\cup AB$, не содержащей точки C . Найдите площадь четырехугольника $AEFG$.

70. НГУ, 1988 г., мехмат, № 3 (из 5).

Окружность O_1 радиуса $3r$ касается продолжения стороны AB угла ABC , ее центр лежит на стороне BC . Окружность O_2 радиуса r касается сторон угла ABC и окружности O_1 . Найдите угол ABC .

71. НГУ, 1988 г., физ. факультет, № 3, (из 5).

В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Известно, что биссектриса угла C делит площадь треугольника AMD пополам. Найдите длину стороны AD , если $CD=4$.

72. МФТИ, 1985 г., № 4 (из 5).

Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точке L так, что $AB = 4/\sqrt{3} \cdot AL$. Радиус окружности равен R , угол $\angle CAD = 45^\circ$. Найдите площадь трапеции.

73. МФТИ, 1985 г., № 4 (из 5).

Дан треугольник ABC . Окружность радиуса R касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно и пересекает медиану BD в точке L так, что $BL = \frac{5}{9}BD$. Найдите площадь треугольника.

74. МФТИ, 1985 г., № 4 (из 5).

Основание MQ трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$, $MQ > NP$) является диаметром окружности, которая касается прямой MN в точке M и пересекает сторону PQ в точке K так,

что $PQ = 4\sqrt{3} KQ$. Радиус окружности равен R , угол $\angle NQM = 60^\circ$. Найдите площадь трапеции.

75. МФТИ, 1985 г., № 4 (из 5).

Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке L так, что $4BL = BC$. Найдите площадь ромба.

76. МФТИ, 1988 г. № 3 (из 5).

Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O , $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K лежит на стороне BC , причем $BK:KC = 1:2$. Треугольник AKD равносторонний. Найдите его площадь.

77. Каз.ГУ, 1989 г., ВМК, физфак, мехмат, № 14 (из 16).

В равносторонний $\triangle ABC$ вписана окружность и проведен отрезок MN , который касается ее и параллелен стороне AB . Определить периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны AB равна 18.

78. Каз.ГУ, 1989 г., геофак, географфак, химфак, № 15 (из 16).

Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определить длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

79. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова, 1989 г., № 2 (из 3).

На стороне AD прямоугольника $ABCD$ взята точка F такая, что $FD = \frac{1}{3}AD$. Угол $\angle CAD$ равен α , угол $\angle CFD$ равен β . Положим $\gamma = \alpha + \beta$, $k = \tan \alpha$

а) Докажите, что $\tan \gamma = \frac{4k}{1-3k^2}$

б) При каких значениях α величина угла γ меньше $\frac{\pi}{2}$.

в) Найдите α такое, что $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

г) Докажите, что $\beta < 3\alpha$.

80. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова, 1989 г., № 2 (из 3).

В треугольнике ABC угол A — прямой, угол C равен α . Длина гипотенузы BC равна 1. Круг радиуса r с центром в точке A касается внешним образом кругов с центрами в точках B и C . S — сумма площадей трех кругов.

а) Покажите, что $S = \pi(1 + 3r^2 - 2r(\sin \alpha + \cos \alpha))$.

б) При каком r круги с центрами в точках B и C также касаются друг друга?

в) Пусть r таково, что выполнены условия предыду-

шего пункта. Какое наименьшее значение может принимать площадь S в зависимости от α ?

81. ГПИ, 1989 г., № 4 (из 7).

В треугольнике ABC вектор $\vec{AB} = \vec{m}$ и вектор $\vec{AC} = \vec{n}$

Разложить по векторам \vec{m} и \vec{n} вектор \vec{BM} , где точка M делит отрезок AC в отношении $AM:MC=1:3$.

82. РПИ, 1989 г., № 3 (из 10).

В прямоугольной трапеции острый угол равен $\alpha = 30^\circ$, а длина вписанной в нее окружности равна $c = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Определить площадь трапеции.

83. МИРЭА, 1989 г., № 3 (из 5).

Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом в точке A . Общие касательные AD и BC к окружностям пересекаются в точке D . Докажите, что $AD^2 = Rr$ (B и C лежат на окружностях).

84. МАИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояние соответственно 3 см и 4 см. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

85. МАИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 см и $\sqrt{13}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

86. МАИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2 . Найдите стороны треугольника.

87. МАИ, 1989 г., № 4 (из 6).

Боковые стороны AB и CD трапеции продолжены до пересечения в точке E . Точка O — центр описанной около треугольника ADE окружности. Найдите величину острого угла A трапеции, если известно, что точки A, B, C, D, O лежат на окружности, радиус которой в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ADE .

88. МАИ, 1989 г., № 3 (из 6).

Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма, произведение длин двух неравных высот которого равно 9, а величина острого угла параллелограмма не меньше 30° и не больше 45° .

89. МИЭТ, 1989 г., № 6 (из 13).

В треугольнике ABC $AC=3$, $BC=4$, а медианы AD

и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника.

90. МИЭТ, 1989 г., № 6 (из 13).

Средняя линия трапеции равна 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

91. МЭИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 см и 21 см. Найдите длину окружности, описанной около данного треугольника.

92. СГУ 1989 г., биолог. и химич. факультеты, № 3 (из 4).

В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 4. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N . Найдите величину угла MON , если длина отрезка MN равна 2.

93. СГУ 1989 г., биолог. и химич. фак., № 3 (из 4).

В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 8. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке L . Найдите величину угла KOL , если длина KL равна 2.

94. ГГУ, 1989 г.

Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Длина диагонали AC равна a , длина боковой стороны BC равна b . Найдите площадь трапеции.

95. ГГУ, 1989 г.

Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC , длина стороны которого равна a , опущены перпендикуляры на стороны AB , BC , CA . Длины перпендикуляров соответственно равны m , n , k . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

96. ГГУ, 1989 г.

Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC , точка M на продолжении стороны AC за точку A , при этом $AM=AC$, $BN:NC=3:4$. Найти в каком отношении прямая MN делит сторону AB .

97. ЛГУ, 1989 г., геолог. факультет, № 4 (из 5).

Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины

диагоналей равны 5 и $\sqrt{34}$. Углы при большем основании — острые. Найдите площадь трапеции.

98. ЛГУ, 1989 г., экономич. факультет, № 5 (из 5).

Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

99. ЛГУ, 1989 г., матмехфак, факультет психологии, № 4 (из 5).

Два круга одинакового радиуса r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга радиуса R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих трех кругов (из двух возможных случаев рассмотреть тот, в котором центр 4-го круга и центр круга радиуса R лежат по разные стороны от точки касания кругов радиуса r).

100. ЛГУ, 1989 г., факультеты прикладной математ., экономич., филологич., № 4 (из 5).

В треугольнике ABC угол C — прямой. Точки D и E на катете BC расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части. $AD=a$, $AE=b$. Найдите отношение площадей треугольников ADC и AEC .

101. ЛГУ, 1989 г., географ. и химич. факультеты, № 4 (из 5).

Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a повернут вокруг вершины прямого угла на угол 30° . Найдите площадь общей части исходного и перевернутого треугольников.

102. НГУ, 1989 г., мехмат, и экон. факультеты, № 3 (из 5).

Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB , точка F — середина CD . Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P , а биссектриса угла ADC — в точке Q . Длины отрезков EQ , PQ и PF равны. Найдите площадь трапеции.

103. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., геолог. факультет, № 4 (из 6).

В треугольнике ABC проведена биссектриса CD , при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7 : 5. Найдите AD , если известно, что $BC=1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.

104. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., геолог. факультет, № 4 (из 6).

В треугольнике ABC угол ACB — прямой, CD — бис-

сектриса, величина угла BDC равна 75° . Найти BD , если известно, что $AC = \sqrt{3}$.

105. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., филологич. факультет, № 4 (из 5).

В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D , причем $\angle CDA$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AD , DC и дуги AC , если $OC = 2$ см, $OD = \sqrt{3}$ см.

106. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., псих. факультет, № 4 (из 5).

В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности, так, что одна из них касается сторон MN , NP и PQ , а другая — сторон MN , MQ и PQ . Точки B и A лежат, соответственно, на сторонах MN и PQ , причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ , если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

107. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., биолог. факультет, № 4 (из 5).

В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$ проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна $2(KN = 2)$, а угол NFH — тупой. Найдите угол HKF .

108. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., почв. факультет, № 4 (из 5).

Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а длина стороны AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E . Найдите отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED , к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC .

109. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., экон. факультет, № 5 (из 6).

Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Найдите величину угла ACB , если $CE = 1$, $BE = CD = 4$, $AD:BD = 4:1$.

110. МГУ, им. М. В. Ломоносова, экон. факультет, № 5 (из 6), 1989 г., В. 4.

Треугольник ABC вписан в окружность. Сторона CB

продолжена за точку B до точки E так, что $BE=3$. Отрезок AE пересекает окружность в точке D и $DE=2$. Найдите величину угла ABC , если $AC=\sqrt{129}$, $AD:BC=7:3$.

111. МГУ им. М. В. Ломоносова, географ. факультет, № 5 (из 5), 1989 г.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD=2$, $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC .

112. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., ВМК, № 1 (из 6).

Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиуса $\sqrt[4]{10}$?

113. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., хим. фак., № 4 (из 5).

В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O . Треугольники MON и $MO'N$ симметричны относительно общей стороны MN . Угол MON в два раза больше, чем угол $LO'K$. Найдите стороны прямоугольника $LMNK$, если известно, что площадь пятиугольника $LMO'NK$ равна $5\sqrt{3} \text{ м}^2$.

114. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., физфак., № 2 (из 6).

В треугольнике известны длина a одной из сторон и величины α и β прилежащих к ней углов. Найдите площадь треугольника.

115. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., физфак., № 6 (из 6).

Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей радиусов R и r пересекает их общую касательную в точке C (A между B и C , M и N — точки касания). Найдите: 1) радиус окружности, проходящей через точки A , M и N ; 2) отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN .

116. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., физфак., № 2 (из 6).

В остроугольном треугольнике известны величины α и β двух углов A и B и длина h высоты, опущенной из вершины. Найдите площадь треугольника.

117. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., филфак., № 6 (из 6), В. 2.

Общая касательная к двум пересекающимся окруж-

ностям радиусов R и r (A и B — точки касания) пересекает продолжение их общей хорды MN в точке D (N между D и M). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника AMB

2) отношение высот треугольников AMD и DMB , опущенных из вершины D .

118. МГУ им. М. В. Ломоносова, мехматфак., 1989 г., № 3 (из 6).

В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=4$ и $BC=2$ проведена средняя линия EF (точка E лежит на AB). Прямая, проходящая через вершину A трапеции, пересекает боковую сторону CD в точке H , а среднюю линию в точке G , причем $3GF=EF$. Найдите отношение высоты треугольника AHD , опущенной из вершины H к высоте трапеции.

119. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., мехматфак, № 3 (из 6).

Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN=3$, а угол M равен 120° . Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN . Найдите площадь треугольника KLN .

120. МФТИ, 1989 г., № 2 (из 5).

Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD=\frac{1}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC=1$.

121. МФТИ, 1989 г., № 3 (из 5).

Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC . Прямые, проходящие через точку B , касаются окружности в точках D и E . Найдите площадь треугольника DBE , если $AB=BC=2$, $\angle ABC=2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

122. МГУ, ф-т почвоведения 1990 г.

В треугольнике ABC известна сторона $AB=4$, $\angle BAC=30^\circ$, $\angle ABC=130^\circ$. На AB как на диаметре построен круг. Найти площадь части круга внутри треугольника.

123. МГУ, географический факультет, 1990, № 4 (из 5)

На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и M так, что $AK:KB=2:3$, а

$BM:MC=2:1$. Найти отношение площадей треугольников KBM и KMD .

124. МГУ, биофак, 1990 г., № 4 (из 5)

Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N . Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P . Найти радиус этой окружности, если $AM=1$, $AN=2$, $AP=4$.

125. МГУ, геологический ф-т, 1990 г. № 6 (6 из 6).

На стороне BC треугольника BCD выбрана точка E , а на стороне BD — точка F так, что $\angle BEF = \angle BDC$. Площадь круга, описанного около треугольника CFD в 5 раз меньше площади круга, описанного около треугольника BEF . Отношение площади четырехугольника $CEFD$ к площади треугольника BEF равно $\frac{9}{16}$. Угол FDE равен 45° . Найти угол CED .

126. МГУ, экономический ф — т, 1990 г., № 3 (из 5)

На гипотенузе KM прямоугольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов KL и LM в точках A и B . Найти длину отрезка AK , если известно, что $BM = \frac{23}{16}$, $\frac{AK}{AC} = \frac{5}{23}$, где C — точка пересечения окружности с KM , лежащая между точками O и M .

127. МГУ, мехмат, 1990 г., № 1 (из 6)

В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30° . Найти площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

128. МГУ, ВМК, 1990 г. № 5 (из 6)

Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Окружность радиуса $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ касается лучей, образующих угол ACB , и вписанной в треугольник ACB окружности. Найти тангенс угла ABC , если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC .

129. МГУ, ВМК, 1990 г., № 5 (из 6)

Около окружности радиуса $\frac{\sqrt{6}}{2}$ описан треугольник ABC . Периметр этого треугольника равен 16, наибольший из его внутренних углов находится при вершине A , а котангенс угла ABC равен $\frac{5\sqrt{6}}{12}$. Найти наибольший из радиусов окружностей, касающихся вписанной в тре-

угольник ABC окружности и лучей, образующих угол BAC .

130. МФТИ, 1990 г., № 3 (из 5)

Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O . Найти длины сторон AB и BC , если $\angle A = 2 \arccos \sqrt{\frac{5}{6}}$, $OC = \sqrt{7}$, $OD = 3\sqrt{15}$, $AD = 5 \cdot BC$.

131. МФТИ, 1990 г., № 4 (из 6)

На продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D взята точка K . Прямые AC и BK пересекаются в точке Q . Известно, что $AK = 14$ и что точки A , B и Q лежат на окружности радиуса 6, центр которой принадлежит отрезку AK . Найти длину отрезка BK .

Ответы. Указания.

1). 202,8. 2). $\frac{a^3 b}{2(a^2 + b^2)}$

3). Если $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, задача не имеет решения; при $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ задача имеет одно решение: $AC = \frac{1}{2}$; при $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ задача имеет два решения $AC = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a^2 - 3})$; при $a \geq 1$ — одно решение: $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a^2 - 3})$.

4). $3\sqrt{30}$. 5). $BK < AM$ 6). К вершине A .

7). $\sqrt{6}$ 8). $\frac{93}{25}$ 9). $6\sqrt{2}$.

11). 90° . 12). а) 15° , 100° , 65° ; б) 30° , 80° , 70° .

13). $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 14). $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ 15). 90° , 60° , 30° .

16). 3:1. 17). 30° , 60° , 90° ($\angle B = 90^\circ$).

18). $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$ 19). Площадь треугольника, затем площадь квадрата, шестиугольника и круга. 20). $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$ 21). 2 и 1,5.

22). В 8 раз. 23). $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ 24). 58° . 25). $\arccos \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$ 26). 75.

27). 1:1 28). $\frac{a}{\sin \alpha}$

29). $\sqrt{13}$. 30). Таких точек четыре. M_1 — точка пересечения медиан, а также точки M_2 , M_3 и M_1 такие, что $ABCM_2$, $BCAM_3$ и $CABM_1$ —

параллелограммы. 31). $\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$ 32). $\frac{a+b}{2}$ 33). $\frac{c}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$.

34). $m^2 \frac{\sqrt{5}}{2}$

35). 30° . 36). $\frac{ab}{2}$. Указание. Докажите, что диагонали данного четырехугольника перпендикулярны.

37). $\sqrt{a(2l-a)}$ 38). $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$ 39). Если $a < b$, то биссектриса угла A пересекает основание BC ; если же $a > b$, то — боковую сторону CD . 40). $6-\pi : 2\pi : 6-\pi$ 41). 9. Указание. Докажите, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам равны. Теперь, если y и $4y$ площади двух оставшихся треугольников, то $y \cdot 4y = 2 \cdot 2$. (Докажите).

$$42). a^2 \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad 43). 2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}.$$

44). $2 \arccos \frac{l(b+c)}{2bc}$. Указание. Пусть K — основание биссектрисы, $\angle A = 2\alpha$. Имеем $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK}$ или $\frac{1}{2}bc \sin 2\alpha = \frac{1}{2}cl \sin \alpha + \frac{1}{2}bl \sin \alpha$.

45). $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$. Указание. Пусть указанные в условии высота, биссектриса и медиана выходят из вершины A треугольника ABC . Обозначим через M середину BC , а через K точку, в которой биссектриса при продолжении пересекает описанную около ABC окружность. K — середина дуги BC . Прямая MK перпендикулярна BC и проходит через центр окружности. Из условия следует, что $\angle MKA = \angle MAK$, то есть $AM = MK$. Значит, M — центр окружности, описанной около ABC . И т. д.

46). $2R\sqrt{2}, 2R\sqrt{2}, 2R\sqrt{2}, 4R + 2R\sqrt{2}$. Указание. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC , $AD > BC$, O_1 — на AC , O_2 — на BD . Из условия следует, что AC — биссектриса угла BAD , а отсюда, что $AB = BC$. Точно также $BC = CD$. Положим $AB = BC = CD = a$, $AD = b$. Имеем $O_1O_2 = 2R = \frac{1}{2}(b-a)$. Проекция боковой стороны на основание также равна $\frac{1}{2}(b-a) = 2R$. А поскольку и высота трапеции $2R$, то $a = 2R\sqrt{2}$ и т. д. (условие равнобокости трапеции является лишним. Задача предлагалась ранее на мехмате МГУ).

47). 39. Указание. Искомая медиана в три раза больше медианы в треугольнике со сторонами $\frac{2}{3} \cdot 36, \frac{2}{3} \cdot 15, 26$, проведенной к стороне 26. Этот треугольник прямоугольный с гипотенузой 26. 48). 48,6. Указание. Пусть углы, прилежащие к данной стороне равны 2α и 2β . Тогда $3(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = 9$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 3$. Если h — высота треугольника к данной стороне, то $h(\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta) = 9$, то есть $h = \frac{9}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta}$. Надо найти α и β , при которых $\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta$ принимает наибольшее значение. Положим $\operatorname{ctg} \alpha = x$, $\operatorname{ctg} \beta = y$, $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 3$ откуда $xy \leq \frac{9}{4}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{x^2-1}{2x}$, $\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{y^2-1}{2y}$,

$$\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} = \frac{3}{2} - \frac{x+y}{2xy} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{xy} \right) \leq$$

$$\leq \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4}{9} \right) = \frac{5}{6}$$

50). $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)$ и $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$. Указание. Из условия следует подо-

бие треугольников MAO и MBC , то есть $\frac{MC}{MO} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AO} = 2$. Откуда

$M(x, y)$ получим $(x-4)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$, $(x-2)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2)$ или $3x^2 + 3y^2 + 8x = 16$, $3x^2 + 3y^2 + 4x - 8y = 0$. Вычитая уравнения, получим $x + 2y = 4$ и т. д. 51). б) 60° , в) $4\sqrt{3}$. Указание. в) Положим

$g(\alpha) = a$ или $8 - 4 \cos \alpha = a \sin \alpha$. Обозначим $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$ тогда

$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Имеем уравнение $12t^2 - 2at + 4 = 0$. Из

условия $D \geq 0$ находим $a^2 \geq 48$, откуда, поскольку, $a > 0$, $a \geq 4\sqrt{3}$. 52).

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq S(\alpha) \leq \sqrt{3}$ 53). 1. Указание. Если боковая сторона, перпендикулярная основаниям, равна x , то другая равна $2x$. Пусть меньшее основание y , тогда большее равно $y + x\sqrt{3}$. Площадь трапеции равна

$S = (y + x\frac{\sqrt{3}}{2})x$ По условию $3x + x\sqrt{3} + 2y = 6$, откуда

$y + x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(2-x)$ Задача сводится к определению x , при котором

функция $S = \frac{3}{2}(2-x)x$ достигает наибольшего значения. 54). 3,9.

55). 5. 56). 20. 57). $2 \arctg(2 \pm \sqrt{3})$ 58). $\left| \frac{2}{5} - \cos^2 \alpha \right|$

59). $\arcsin \frac{5}{13}$, $\arccos \frac{5}{13}$ 60). 2. Указание. Из условия следует, что отрезки OA и OB пересекают сторону CD . Обозначим через K проекцию O на BC . Если $OK = x$, то $BC = 2x$, $CK = \sqrt{13 - x^2}$, $BK = \sqrt{25 - x^2}$. Получаем

уравнение $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{13 - x^2} = 2x$ 61). $h\sqrt{4r^2 \sin^2 \alpha - h^2}$ 62). $3\sqrt{3}$. 63). $\sqrt{a^2 + ab}$, $\sqrt{b^2 + ab}$. Указание. Пусть ABC данный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), CD — его высота, AK — перпендикуляр, опущенный из A на касательную, проходящую через C . Докажите равенство треугольников ACK и ACD . 64).

$\frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(ab + a^2 + b^2)^2}$ 65). $\frac{3}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3})R^2$. Указание. Из того, что касательная (AM) образует с хордой MK угол в 60° , следует равенство $MK = R\sqrt{3}$. Если $AL = LK = x$, то $AM^2 = AL \cdot AK = 2x^2$. Запишем теорему косинусов для $\triangle AMK$: $4x^2 =$

$= 2x^2 + 3R^2 - Rx\sqrt{6}$ и т. д.

66). 15,36. Указание. Общая хорда AB есть удвоенная высота треугольника O_1BO_2 , опущенная на O_1O_2 (этот треугольник прямоугольный с катетами 3 и 4 и гипотенузой $O_1O_2 = 5$). $AB = \frac{24}{5}$.

$\angle ABC = \angle O_1O_2K = \varphi$ (или $180^\circ - \varphi$) ($O_1K \parallel CD$, $O_2K \perp BD$). Нетрудно доказать, что $O_1K = \frac{1}{2}CD = 4$. Значит $\sin \varphi = \frac{4}{5}$. Высота, опущенная из

A на CD равна $AB \sin \varphi = \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{5}$ и т. д.

67). $AC = 6$, $BC = 4\sqrt{21}$, $AB = 2\sqrt{105}$ Указание. Пусть медианы пе-

ресекаются в точке K . Обозначим $x = AK = \frac{2}{3}AN$, $y = CK = \frac{2}{3}CM$. Значит $x - y = 2$. Площадь треугольника AKC равна $\frac{1}{3}S_{ABC} = 8\sqrt{5}$.

Если $\angle AKC = \varphi$, то $\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Имеем систему $x - y = 2$, $xy = 48$. Откуда $x = 8$, $y = 6$. Поскольку $\varphi = \arccos \frac{2}{3}$ или $\varphi = \pi - \arccos \frac{2}{3}$, то возможны два случая: $AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2AK \cdot KC \cos \varphi = 36$, $NC^2 = \frac{1}{4}BC^2 = KC^2KN^2 + 2KC \times KN \cos \varphi = 84$,

$AM^2 = \frac{1}{4}AB^2 = AK^2 + KM^2 + 2AK \cdot KM \cos \varphi = \frac{2}{3}$ Откуда $AC = 6$,

$BC = 4\sqrt{21}$, $AB = 2\sqrt{105}$ ($\angle C > 90^\circ$) Во втором случае $\cos \varphi = -\frac{2}{3}$,

$AC = 2\sqrt{41}$, $BC = 4\sqrt{5}$, $AB = 2\sqrt{41}$. Этот треугольник остроугольный.

68). 8,1. Указание. Пусть катет AC образует со стороной квадрата угол φ (φ — наименьший угол), тогда BC образует с соответствующей стороной также угол φ . Сторона квадрата равна $AC \cos \varphi = 3 \cos \varphi$, она также равна $AC \sin \alpha + BC \cos \varphi = 3 \sin \varphi + 2 \cos \varphi$, значит $\cos \varphi = 3 \sin \varphi$

69). $59\frac{1}{2}$. Указание. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\sphericalangle AC = 2\alpha$, $\sphericalangle CB = \pi - 2\alpha$, $\sphericalangle AE = \sphericalangle CE = \alpha$, $\sphericalangle CG = \sphericalangle GB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\sphericalangle BF = \sphericalangle FA = \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\sphericalangle ECD + \sphericalangle AEF = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$, то угол между диагоналями EF и AG равен $\frac{\pi}{2}$. Диагонали AG соответствует дуга

$ACG = \frac{\pi}{2} + \alpha$, значит, $AG = 2R \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 13 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$. Ана-

логично $EF = 13 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$ Площадь четырехугольника равна

$$\frac{1}{2}AG \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 169 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{4} 169 (1 + \sin \alpha) = \frac{1}{4} \cdot 169 \left(1 + \frac{5}{13} \right) = 59\frac{1}{2}$$

70). $\pi - \arccos \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}$. Указание. Пусть $\angle ABC = 2\varphi$. Из усло-

вия следует, что $2\varphi > 90^\circ$. Имеем $BO_1 = \frac{3r}{\sin 2\varphi}$, $BO_2 = \frac{r}{\sin \varphi}$, $O_1O_2 = 4r$,

$$\angle O_1BO_2 = \varphi. \text{ Запишем для } \triangle O_1BO_2 \text{ теорему косинусов } 16r^2 = \frac{9r^2}{\sin^2 2\varphi} + \frac{r^2}{\sin^2 \varphi} - \frac{6r^2 \cos \varphi}{\sin 2\varphi \cdot \sin \varphi},$$

$$16 = \frac{9}{\sin^2 2\varphi} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{6}{1 - \cos^2 2\varphi} - \frac{4}{1 - \cos 2\varphi}, \cos 2\varphi = y \text{ и т. д.}$$

71). $\sqrt{33} - 1$. Указание. Пусть биссектриса угла C пересекает AB в точке L . Докажите, что L на продолжении AB . Обозначим через K и P точки пересечения CL с DM и DA соответственно,

$BC=DA=LB=x$. Из подобия треугольников DKC и LKM имеем $\frac{DK}{KM} = \frac{DC}{LM} = \frac{4}{x-2}$, откуда $\frac{DK}{DM} = \frac{4}{x+2}$. Аналогично найдем $\frac{DP}{DA} = \frac{4}{x}$. Из условия $\frac{DK}{DM} \cdot \frac{DP}{DA} = \frac{1}{2}$, откуда $x^3 + 2x - 32 = 0$ (72). $\frac{2R^2(6-\sqrt{3})}{3}$. Указание. Из условий следует, что $\angle ADC = 90^\circ$,

$CD=AD=2R$. Рассмотрим треугольник ABD . В этом треугольнике высота к AD равна $2R$; если $AL=x$, то $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}x$, а высота $DL = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Получаем уравнение (дважды выражаем площадь ABD) $2R^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Из этого уравнения найдем $x=R$. Значит,

$\angle BAD = 60^\circ$, $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}R$, $BC = AD - AB \cos 60^\circ = 2R - \frac{2R}{\sqrt{3}}$ и т. д.

73). $0,27R^2$ Указание. Докажите, что AL — биссектриса угла BAC . Тогда $\frac{AB}{AD} = \frac{BL}{DL} = \frac{5}{4}$. Если $AB=5x$, то $AD=4x$, $BD=3x$. Затем рассмотрим прямоугольный треугольник OAB (O — центр окружности), в котором $OA=R$, $AB=5x$, $AD=4x$. Из равенства $AB \cdot AO = OB \cdot AD$ найдем $OB = \frac{5}{4}R$ и т. д. 74). $(10\sqrt{3} - 12)R^2$ Указание. См. решение

задачи 72. В данной трапеции $\angle PQM = 75^\circ$ 75). $\frac{15R^2\sqrt{15}}{8}$. Указание. O — центр окружности. Если $\angle BAD = \alpha$, то $\angle OBL = (180^\circ - \alpha - 90^\circ) = 90^\circ - \alpha$. $AB = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $BL = 2R \sin \alpha$. Имеем уравнение $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} 8 \sin \alpha$, откуда $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16}$ и т. д.

76). $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Указание. Обозначим через M и N проекции K на OC и OB соответственно. $OMKN$ — прямоугольник, $OM = NK = 1$. Положим $ON = KM = x$, $OD = y$. Имеем систему $AD^2 = AK^2 = KD^2$ или $4 + y^2 = 9 + x^2 = (x+y)^2 + 1$ или $y^2 - x^2 = 5$, $2xy + x^2 = 3$. Умножим первое уравнение на 3, а второе на -5 и сложим, получим $3y^2 - 10yx - 8x^2 = 0$, откуда $\frac{y}{x} = 4$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ и т. д. 77). 48.

78). 12. 79). б) $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$, в) $\operatorname{arctg} \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ г) Докажите, что при

$0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ будет $\operatorname{tg} 3\alpha > 3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Если же $\alpha \geq \frac{\pi}{6}$, то

$3\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, а $\beta < \frac{\pi}{2}$ 80). б) $r = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$, в). $\frac{\pi}{4}(5 - 2\sqrt{2})$

81). $\vec{BM} = -\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{n}$ 82). $\frac{1}{2}$. 83). Указание. Пусть C и B — точки касания. CB — внешняя касательная к данным окружностям. $AD = CD$, $AD = DB$. Значит, $AD = \frac{1}{2}CB$. Задача сводится к нахождению BC — общей внешней касательной к данным окружностям. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей ($O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$). Проведем через O_1 прямую, параллельную BC , до пересечения с O_2C в точке K .

Треугольник O_2O_1K — прямоугольный с гипотенузой $O_1O_2=R+r$ и катетом $O_2K=|R-r|$, тогда $BC=O_1K=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$ 84). 2.4. 85). $\sqrt{3}$. 86). $\sqrt{2p_1p_2}-p_1$, $\sqrt{2p_1p_2}-p_2$, $p_1+p_2-\sqrt{2p_1p_2}$. 87). 75°. Указание. Поскольку трапеция вписанная, то она равнобокая. O — в середине меньшей дуги описанной около $ABCD$ окружности. Если радиус этой окружности r , то $AO=DO=r\sqrt{3}$. Значит, AOD — правильный треугольник. $\angle AED=\frac{1}{2}\angle AOD=30^\circ$.

$\angle EAD=\angle EDA=90^\circ-15^\circ=75^\circ$.

88). 18; $9\sqrt{2}$ 89). $\sqrt{5}$. 90) 5 и 15. 91). 29π. 92). 120°. Указание. Имеем $BE=BA=4$. Пусть $AE=2x$, тогда $AM=EN=x$, $BM=BN=4-x$. Из подобия треугольников BMN и BAE получим $\frac{4-x}{4}=\frac{2}{2x}$, откуда $x=2$ 93). $2\arccos\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ 94). $\frac{3}{4}ab$. Указание.

Проведем через C прямую, параллельную AD . Эта прямая пересечет AB в середине AB — точке K . Треугольники ADC , CKA и KCB равновелики, $\angle ACB=90^\circ$ (т. к. $AK=KB=KC$ то K — центр окружности, описанной около ACB). 95). $\frac{mn+nk+km}{a^2}$. 96). 3:2 (от вершины B).

Указание. Проведем через B прямую, параллельную AC и обозначим через K ее точку пересечения с MN . Из подобия треугольников BNK и CMN найдем $BK=\frac{3}{4}MC=\frac{3}{2}MA$ и т. д. 97). 13,5. Указание. Докажите, что площадь трапеции равна площади треугольника со сторонами 5, $\sqrt{34}$. 9. Условие, что углы при большем основании острые, является лишним. 98). 8. Указание. Докажите, что имеет место равенство $P_1^2+P_2^2=P^2$, где P — периметр всего треугольника, P_1 и P_2 — периметры двух меньших треугольников. 99). $R\frac{R-r-\sqrt{R^2-2Rr}}{R+r-\sqrt{R^2-2Rr}}$. Указание.

Пусть O , O_1 , O_2 — центры данных кругов радиусов R , r и r соответственно, O_3 — центр искомого круга, радиус которого x . Имеем четырехугольник $OO_1O_3O_2$, в котором $OO_1=OO_2=R-r$, $O_1O_2=2r$, $O_1O_3=O_2O_3=r+x$, $OO_3=R-x$. Если M — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника, то $OM=\sqrt{R^2-2Rr}$, $MO_3=\sqrt{x^2+2rx}$. Имеем уравнение $OM+MO_3=OO_3$, $\sqrt{R^2-2Rr}+\sqrt{x^2+2rx}=R-x$ 100).

$\frac{4a^2+b^2+b\sqrt{b^2+8a^2}}{b^2+b\sqrt{b^2+8a^2}}$ Указание. Обозначим $\angle EAC=\angle DAE=\varphi$. Для

φ имеем уравнение $a\cos 2\varphi=b\cos \varphi$ или $a(2\cos^2\varphi-1)=b\cos \varphi$. Нам

надо найти $\frac{S_{ADC}}{S_{AEC}}=\frac{DC}{EC}=\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}=\frac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi-1}$ 101). $a^2(2-\sqrt{3})$

102). $6\sqrt{55}$. 103). $3-\sqrt{3}$. 104). $\sqrt{3}-1$. 105). $\sqrt{84}-9$. Указание.

Пусть радиус искомой окружности равен x , O_1 — ее центр. Тогда в треугольнике OO_1D имеем $O_1D=\frac{2x}{\sqrt{3}}$ (O_1D — биссектриса $\angle ADC$, расстояние от O_1 до AD равно x), $OO_1=2-x$, $OD=\sqrt{3}$, $\angle O_1DO=\frac{2\pi}{3}$.

Записываем теорему косинусов относительно $\angle O_1DO$. 106). $b+p$. Указание. По свойству описанного четырехугольника $MQ+BA=MB+AQ$. Значит, периметр $BAQM$ равен $2(MQ+BA)$. Аналогично, периметр $ABNP$ равен $2(NP+AB)$, а их разность, равна $2MQ-2NP=2P$. 107)

$\arctg \frac{4\sqrt{33}-7\sqrt{7}}{37}$. Указание. Из того, что $\angle NFH$ тупой следует, что центр окружности — точка O — лежит по другую сторону от NH , чем AF . Из равенства $KA \cdot KF = KN \cdot KH$ найдем ($KN=2$, $KA=\sqrt{11}-1$, $KF=KA+AF=(\sqrt{11}-1)+2=\sqrt{11}+1$) $KH=5$. Значит, $NH=3$. Хорды NH и AF удалены от центра соответственно на $\frac{\sqrt{7}}{2}$ и $\sqrt{3}$. Имеем

$$\operatorname{tg} \angle OKF = \frac{\sqrt{3}}{KA + \frac{1}{2}AF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}, \quad \operatorname{tg} \angle OKH = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\operatorname{tg} \angle HKF = \operatorname{tg}(\angle OKF - \angle OKH) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{7}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{4\sqrt{33}-7\sqrt{7}}{37}. \quad 108).$$

$\frac{10}{3}$. Указание. Пусть M и N — середины AD и DC соответственно, P и Q — центры окружностей, вписанных в AED и DEC соответственно. P и Q лежат на ME и NE . В треугольнике DME имеем $DM = \frac{5}{2}$, $ME=6$, $DE = \frac{13}{2}$, DP — биссектриса угла MDE . Имеем

$$\frac{PE}{MP} = \frac{13}{5}. \quad \text{Значит, } PE = \frac{13}{18}ME = \frac{13}{3}. \quad \text{Аналогично найдем}$$

$QE = \frac{13}{10}$. 109). $\pi - \arccos \frac{\sqrt{15}}{20}$. Указание. Пусть $BD=x$, $DA=4x$ ($BA=5x$). Из равенства $BD \cdot BA = BE \cdot BC$ найдем $x=2$. В треугольнике BDC знаем все стороны ($BD=2$, $BC=5$, $DC=4$), найдем $\cos \angle DBC = \frac{13}{20}$. Затем в треугольнике ABC найдем

$AC = \sqrt{60}$ и $\angle ACB$. 110). $\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. 111). $\sqrt{3}$. Указание. В решении используется следующий факт: если P — центр окружности,

вписанной в треугольник KLM , то $\angle KPM = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle KLM$. Пусть теперь E и F — центры окружностей, вписанных в ABD и ACD . Имеем $\angle AED = \angle AFD = 135^\circ$. Значит, точки A , E , F и D лежат на одной окружности. Имеем ($\angle FAE = \angle FDE = \varphi$) $\frac{FE}{\sin \varphi} = \frac{AD}{\sin 135^\circ}$, откуда

$\sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$. Четырехугольник $ABCD$ также вписанный; AD — диаметр этой окружности, $\angle BAC = 2\varphi = 60^\circ$, значит $BC = AD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

112) Можно. 113) $2, 2\sqrt{3}$. Указание. Обозначим $LK=2x$, $LM=2y$, $\angle LO'K=2\alpha$. Тогда (по условию) $\angle MON = \angle MO'N = 4\alpha$. Имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{3y}$ (из $\triangle LO'K$), $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{x}{y}$. Из равенства

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{найдем} \quad \frac{x^2}{y^2} = 3. \quad 114) \quad \frac{\alpha^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}. \quad 115).$$

1) \sqrt{Rr} , 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, AM — хорда первой окружности. Обозначим $\angle AMN = \alpha$, $\angle ANM = \beta$.

Тогда $\angle O_1MA = 90^\circ - \alpha$, $MA = 2R \sin \alpha$ Аналогично $NA = 2r \sin \beta$
 1. Пусть ρ — радиус окружности, описанной около треугольника AMN .

Имеем $\rho = \frac{AN}{2 \sin \alpha} = \frac{r \sin \beta}{\sin \alpha}$, $\rho = \frac{AM}{2 \sin \beta} = \frac{R \sin \alpha}{\sin \beta}$. Таким образом,

$$\rho = \sqrt{\frac{r \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\sin \beta}} = \sqrt{Rr}. \quad 2) \quad C — середина MN, поскольку$$

$MC^2 = CA \cdot CB = NC^2$ Треугольники MAC и NAC равновелики. Значит, отношение расстояний от C до MA и NA равно

$$\frac{NA}{MA} = \frac{r \sin \beta}{R \sin \alpha} = \frac{r}{R} \cdot \frac{\rho}{r} = \sqrt{\frac{r}{R}} \quad 116). \quad \frac{h^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}. \quad 117).$$

$$\sqrt{Rr}, \sqrt{\frac{r}{R}} \quad 118). \quad 2:3 \quad 119). \quad \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \text{Указание. Из условия следует, что}$$

$$\angle LKN = \angle MLN = 30^\circ; \text{ значит, } \angle LNK = 30^\circ \text{ и т. д. } 120). \quad \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad 121).$$

$$\frac{8}{9\sqrt{5}}. \quad \text{Указание. } O — \text{ центр окружности, } M — \text{ середина } AC. \text{ Последова-}$$

$$\text{тельно находим: } AM = 2 \sin(\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{\sqrt{5}}, BM = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

$$OM = \frac{1}{\sqrt{5}}, BO = BM - OM = \frac{3}{\sqrt{5}}, BE = \sqrt{BO^2 - OE^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = BD. \text{ Если}$$

$$K \text{ середина } DE, \text{ то } KE = \frac{BE \cdot OE}{BO} = \frac{2}{3}, BK = \frac{4}{3\sqrt{5}},$$

$$S_{DBE} = BK \cdot KE = \frac{8}{9\sqrt{5}} \quad 122. \quad \sqrt{3 + \frac{\pi}{3}} \quad 123. \quad \frac{6}{13} \quad 124. \quad \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{55}}.$$

Указание. Пусть $MP = PN = x$, $\angle MAP = \angle PAN = \varphi$. По теореме косинусов для треугольников MAP и PAN имеем систему $x^2 = 17 - 8 \cos \alpha$, $x^2 = 20 - 16 \cos \alpha$, из которой $x = \sqrt{14}$, $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

125. Условия задачи противоречивы. Указание. Из равенства углов $\angle BEF = \angle BDC$ следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников CFD и BEF пропорциональны сторонам FC и BF , а поскольку отношение площадей соответствующих кругов равно 5, то $BF = FC\sqrt{5}$. ($FC = x$, $BF = x\sqrt{5}$). Из условия также следует, что отношение площадей треугольников BDC и BEF равно $\frac{25}{16}$. Но эти треугольники подобны, BC и BF — сходственные стороны. Значит,

$$BC = \frac{5}{4}BF = \frac{5}{4}x\sqrt{5}. \text{ Теперь в треугольнике } BFC \text{ все стороны выражены}$$

через x . Кроме того, поскольку точки E, F, D и C расположены на одной окружности ($\angle BEF = \angle FDC$), то $\angle FCB = \angle FDE = 45^\circ$. Записав для треугольника BFC теорему косинусов (относительно угла

$$FCB = 45^\circ), \text{ получим противоречие. } 126. \quad \frac{6}{23}. \quad \text{Указание. Пусть}$$

$$\angle OCA = \angle OAC = \varphi. \text{ Тогда } \angle KOA = 24, \angle OKA = 90^\circ - 2\varphi. \text{ По теореме синусов для треугольника } KAC \text{ имеем } \frac{AK}{AC} = \frac{\sin \varphi}{\sin(90^\circ - 2\varphi)} = \frac{5}{23}.$$

$$\text{Из уравнения } 5 \cos 2\varphi - 23 \sin \varphi = 0 \text{ найдем } \sin \varphi = \frac{1}{5} \text{ и т. д.}$$

$$127. \quad \frac{3(3\sqrt{3} - 4)}{2}.$$

$$128. \quad -\sqrt{15}. \quad \text{Указание. Пусть } O_1 \text{ и } O_2 — \text{ центры вписанной окруж-}$$

ности и окружности, касающейся лучей CA и CB . По условию $r_1 = \frac{\sqrt{15}}{3} < r_2 = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$. Проведем через O_1 прямую, параллельную CA

и опустим из O_2 перпендикуляр на нее O_2K . Получим прямоугольный треугольник O_1O_2K , у которого угол при вершине O_1 равен половине $\angle ACB$, гипотенуза $O_1O_2 = r_1 + r_2 = \frac{8\sqrt{15}}{9}$, $O_2K = r_2 - r_1 = \frac{2\sqrt{15}}{9}$. Если

$\angle ACB = 2\alpha$, то $\sin \alpha = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{1}{4}$. Откуда $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$,

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Из условия и равенства $S = pr_1$ (S — площадь ABC , P — полупериметр) найдем $p = 9$. Пусть отрезки касательных ко вписанной в ABC окружности из вершины A , B и C равны соответственно x , y , z . Поскольку $z \operatorname{tg} \alpha = r_1$, то $z = 5$. Значит, $x + y = p - z = 9 - 5 = 4$.

Далее имеем $S = \frac{1}{2}CA \cdot CB \cdot \sin 2\alpha$ или $3\sqrt{15} = \frac{1}{2}(5+x)(5+y) \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Имеем систему $x + y = 4$, $(5+x)(5+y) = 48$, из которой $x = 3$, $y = 1$. (Из условия $AC > CB$ следует, что $x > y$). 129. $\frac{\sqrt{6(4+\sqrt{15})}}{2}$. 130.

$AB = 2\sqrt{3}$, $BC = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

131. 7. Указание. Если O — центр окружности, то $QO \parallel AB$. ($\angle OQA = \angle QAO = \angle QAB$). Из подобия OKQ и ABK найдем $AB = 10 \frac{1}{2}$. Из треугольника BAO найдем $\cos \angle BAO = \frac{1}{2} \frac{AB}{AO} = \frac{7}{8}$. Затем найдем BK (из $\triangle BAK$)

III СТЕРЕОМЕТРИЯ.

1. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите площадь наибольшего сечения, проходящего через два параллельных не лежащих на одной грани ребра параллелепипеда.

2. Дан правильный тетраэдр с ребром a (треугольная пирамида, все ребра которой равны a). Найдите его полную поверхность, объем, расстояние между противоположными ребрами, радиус описанного шара, радиус вписанного шара.

3. В правильной треугольной пирамиде известна сторона основания a и плоский угол при вершине α . Найдите ее объем, двугранный угол при основании, двугранный угол между боковыми гранями, радиус вписанного и описанного шара.

4. Решите предыдущую задачу для четырехугольной пирамиды.

5. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны.

6. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна a , а боковое ребро равно b .

7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если:

а) плоскость проходит через вершины A и D_1 и середину ребра BB_1 ;

б) плоскость проходит через вершину A и параллельна плоскости DBC_1 ;

в) плоскость проходит через середины ребер AB , BB_1 , $B_1 C_1$

8. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, но не пересекающая его оснований, делит ось цилиндра, боковую поверхность и объем в одинаковом отношении.

9. В конус вписан цилиндр — основание цилиндра ле-

жит на основании конуса, а другое основание цилиндра совпадает с сечением конуса плоскостью. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

10. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на восемь частей. В каждую из этих частей вписано по шару.

а) найдите отношение объема вписанного в одну из частей шара к объему исходного шара;

б) центры вписанных шаров являются вершинами многогранника. Что это за многогранник? Найдите отношение объемов полученного многогранника и данного шара.

11. Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы.

12. Основания цилиндра и конуса расположены в одной плоскости, а шар касается этой же плоскости, причем высота цилиндра равна высоте конуса и равна диаметру шара. Объемы всех трех тел равны между собой. Как относятся их полные поверхности?

13. Найдите объем конуса, разверткой которого является полукруг радиусом R .

14. Найдите угол: а) между двумя диагоналями куба; б) между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю грани куба; в) между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

15. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер треугольной пирамиды объема V .

16. Определите вид многоугольника, являющегося ортогональной проекцией куба на плоскость: а) перпендикулярную диагонали его грани; б) перпендикулярную диагонали куба.

Найдите площадь этой проекции, если ребро куба равно a .

17. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите угол между плоскостью основания этой призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противоположащего этой грани бокового ребра.

18. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, боковое ребро равно 4. Найдите площадь сечения, проходящего через две вершины одного основания призмы и середину стороны другого основания (не совпадающего с боковой гранью призмы).

19. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите объем этой пирамиды, а также радиусы вписанного и описанного шара.

20. В основании правильной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

21. Основания двух правильных треугольных пирамид расположены в одной плоскости. Сторона основания и высота одной соответственно равны 3 и 2, другой, наоборот — 2 и 3. Плоскость, параллельная основаниям, пересекает эти пирамиды по равным треугольникам. Найдите площади этих сечений.

22. Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите радиусы этих шаров.

23. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150° . Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

24. Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, около которого можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

25. Докажите, что если все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

26. Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5, а двугранные углы при основании равны 60° .

27. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанных в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.

28. Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим два шара, каждый из которых касается этих двух плоскостей, плоскости основания конуса и его боковой поверхности, только один касается ее изнутри, а другой — снаружи. Найдите отношение радиусов этих шаров.

29. Осевым сечением цилиндра является квадрат, а

осевым сечением конуса — правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

30. Внутри треугольной пирамиды, все ребра которой равны a , расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других, а также трех граней пирамиды. Найдите радиусы этих шаров.

31. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина — на границе другого основания. Найдите сторону правильного треугольника.

32. МГПИ им. В. И. Ленина, 1988 г., индустр.-педагог. факультет, № 1 (из 5).

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , а площадь полной поверхности $3a^2$. Найдите объем пирамиды.

33. МГПИ им. В. И. Ленина, 1988 г., матфак, № 5 (из 5).

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a . Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC и ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

34. ЛПИ им. М. И. Калинина, 1987 г., физ.-мех. и радиофизич. факультеты, № 5 (из 5).

В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объем V шара, вписанного в пирамиду. Найдите высоту пирамиды.

35. ЛПИ им. М. И. Калинина, 1987 г., факультеты технич. киберн. и экономики и управл. произв., № 5 (из 5).

В правильной пятиугольной пирамиде задан двугранный угол φ при боковом ребре. Найдите плоский угол при вершине боковой грани.

36. МИЭМ, 1988 г., № 3 (из 5).

В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a . Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α . Определите объем призмы.

37. МАИ, 1988 г., № 6 (из 6).

В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точки B , C и A_1 проведено сечение, площадь которого равна S ,

а расстояние от плоскости сечения до вершины B_1 равно h . Найдите объем призмы.

МАИ, 1988 г., № 3 (из 6).

38. Какой наибольший объем может иметь четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1 см?

39. МИФИ, 1988г., № 4 (из 4).

В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l , а угол при вершине осевого сечения конуса равен α .

40. НГУ, 1987 г., № 5 (из 5).

Дана пирамида $ABCD$, ребро DC перпендикулярно плоскости ABC , $AB=3\sqrt{3}$, $BC=3$, угол $ACB=\frac{\pi}{3}$, $DC=\sqrt{13}$. Проведена сфера радиуса 5 с центром в вершине D . Найдите длину линии пересечения сферы с основанием ABC .

41. МИСиС, 1988 г., № 9 (из 12).

Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?

42. МИСиС, 1988 г., № 12 (из 12).

Найдите квадрат отношения высоты конуса к диаметру основания, если конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

43. МИСиС, 1988 г., № 12 (из 12).

В полушар радиуса $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ см вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба (в см^3).

44. МЭИ, 1987 г., № 5 (из 6).

В прямой круговой конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар радиуса R . Найдите объем конуса.

45. МЭИ, 1987 г., № 5 (из 5).

Вычислите объем правильной треугольной пирамиды высотой h , зная, что отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k .

46. МЭИ, 1987 г., № 6 (из 6).

В прямом круговом конусе отношение площади осно-

вания к площади боковой поверхности равно m , а длина образующей равна l . Найдите объем конуса.

47. МАИ, 1987 г., № 8 (из 8).

В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота которой в два раза больше стороны основания, на боковых ребрах SB и SC взяты точки M и N так, что MN параллельна BC . Через прямую MN проходят плоскости α и β . Плоскость α перпендикулярна плоскости грани SBC и содержит точку A , плоскость β проходит через середину бокового ребра SA . Найдите отношение площадей сечений пирамиды плоскостями β и α .

48. МАИ, 1987 г., № 8 (из 8).

Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α . Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы величиной β . Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра равна b .

49. ЛГУ, 1987 г., географ. факультет, № 5 (из 5).

Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , боковое ребро равно a . Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

50. ЛГУ, 1987 г., отд. мат. лингв. филолог. факультета, № 5 (из 5).

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Найдите двугранный угол при боковом ребре.

51. ЛГУ, 1987 г., биолого — почв. факультет, № 5 (из 5).

Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α . Найдите сторону основания призмы.

52. ЛГУ, 1987 г., химический факультет, № 5 (из 5).

Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

53. ЛГУ, 1987 г., факультет психол. и отд. экономич. кибернет., № 5. (из 5).

Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол при вершине осевого сечения α .

54. ЛГУ, 1987 г., факультет прикл. мат.— процессов управл., № 5 (из 5).

Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

55. НГУ, 1987 г., № 5 (из 5).

Точка M — середина ребра AD единичного куба $ABCD A'B'C'D'$. Через середину $B'M$ перпендикулярно $B'M$ проводится плоскость α . Найдите расстояние от центра куба до плоскости α .

56. НГУ, 1987 г., № 5 (из 5).

В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB , BC и BS имеют длину 2 и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проводится плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC . Найдите величину этих углов.

57. НГУ, 1987 г., экон. факультет, № 5 (из 5).

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ в основании равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 равны 1. Точка K — середина ребра AB , точка L — середина ребра B_1C_1 , точка M — середина ребра A_1B_1 , точка N — середина ребра AC . Через прямые KL и MN проведены параллельные плоскости. Найдите объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

58. НГУ, 1988 г., геолого — геофиз. факультет, № 5 (из 5).

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами AB , AC , $AB=2$, $AC=4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M , N , $CM=1$, $CN=6$, на луче BS выбраны точки P , Q , $BP=2$, $BQ=5$. Найдите объем пирамиды $MNPQ$.

59. НГУ, 1988 г., факультет естеств. наук, № 5 (из 5).

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2 , KK_2 , LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A . Точка E принадлежит отрезку AK , $AE:EK=1:3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2 , $K_2F:FL_2=3:5$. Найдите длину отрезка, по которому прямая EF пересекает призму $ABCA_1B_1C_1$.

60. НГУ, 1988 г., мехматфак, № 5 (из 5).

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=5$, $BC=2$. Известно, что

$SB=4$, $SA=3$, $SC=x$, $SD=y$. При каких значениях x и y объем пирамиды наибольший и чему равен этот объем?

61. НГУ, 1988 г., физ. фак., № 5 (из 5).

В основании четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю AC , $AC=8$. Шар касается ребер AA_1 , BB_1 , DD_1 и касается плоскости $ABCD$ в точке C . Найдите радиус шара.

62. МФТИ, 1985 г., № 5 (из 5).

Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $BD:DC=2:3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC , одно из оснований цилиндра проходит через точку D , второе основание имеет общую точку с ребром SC . Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC . Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

63. МФТИ, 1985 г., № 5 (из 5).

Точка M лежит на ребре DC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), $DM:DC=1:15$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAD и SCD , одно из оснований цилиндра проходит через точку M , второе основание имеет общую точку с ребром SC . Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O , причем $SO:SH=1:3$. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

64. МФТИ, 1988 г., № 5 (из 5).

Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB . Точка A лежит на стороне LM и $AM < AL$, точка N равноудалена от точек B и C . Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найдите длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

65. МФТИ, 1988 г., № 5 (из 5).

На продолжении за точку A_1 ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ (ABC — основание) взята точка M . Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α , пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что угол $KK_1 M$ равен $\operatorname{arctg} \sqrt{55}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник

$KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2 = \frac{7}{2}$, $KK_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3 = \frac{3}{8}\sqrt{14}$. Найдите объем призмы.

66. МГПИ, 1989 г., физический факультет, № 1 (из 5).

Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 см и образует угол в 45° с плоскостью основания.

67. МГПИ, 1989 г., индустриально-педагогический факультет, № 1 (из 5).

Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi:4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

68. МГПИ, 1989 г., математический факультет, № 5 (из 5).

Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с углом $A = 60^\circ$. Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом α . Найдите угол наклона ребра SA к плоскости основания.

69. Найти объем шара, описанного около усеченного конуса, у которого радиус меньшего основания в 5 раз меньше радиуса большего основания, образующая равна $2\sqrt{5}$ и составляет с основанием угол $\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

70. Каз.ГУ, 1989 г., ВМК, мехмат., физфак, № 15 (из 16).

Найдите объем правильного тетраэдра, высота которого равна $4\sqrt{3}$.

71. ЛПТИ им. М. И. Калинина, 1989 г., факультет техн. киберн., № 5 (из 5).

В правильной пятиугольной пирамиде заданы α — двугранный угол при боковом ребре и H — высота пирамиды. Найдите образующую конуса, описанного около пирамиды.

72. ЛПТИ им. М. И. Калинина, 1989 г., физ.-мех. и физ.-тех. факультеты, № 5 (из 5).

В правильной треугольной пирамиде задан F — угол между высотой и боковым ребром пирамиды. Найдите отношение квадрата апофемы боковой грани к боковой поверхности пирамиды.

73. Том.ПИ, 1989 г., № 8 (из 8).

Высота конуса 8, а образующая равна 10. Определите радиус вписанного шара.

74. Том.ПИ, 1989 г., № 8 (из 8).

В конус вписан шар. Поверхность шара относится

к площади основания как 4:3. Определить, сколько градусов содержит угол при вершине конуса?

75. Том.ПИ., 1989 г., № 6 (из 8).

Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 6 и острым углом в 30° . Двугранные углы при основании равны 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.

76. ЯПИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб со стороной a и острым углом α . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β . Определите площадь сечения ACB_1 .

77. ГПИ, 1989 г., № 6 (из 7).

Найдите радиус основания R и высоту H цилиндра, имеющего при данном объеме $V = 16\pi \text{ м}^3$ наименьшую полную поверхность.

78. ГПИ, 1989 г., № 5 (из 7).

Даны вектор $\vec{a} = (-2; 1; 4)$ и точка $M(1; 0; -1)$. Найдите координаты точки N , если $2\vec{a} + 3 \vec{MN} = 0$

79. ГПИ, 1989 г., № 7 (из 7).

Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны b и заключают между собой угол α . Грань пирамиды, проходящая через неравную сторону основания, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол ϕ . Определите объем пирамиды.

80. РПИ, 1989 г., № 9 (из 10).

Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° . Сторона основания 2 м. Определить боковую поверхность пирамиды.

81. Таш.ГУ, 1989 г., математич. факультет, № 5 (из 5).

В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с меньшим основанием $AB = a$ и острым углом α . Высота SO пирамиды равна h . Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K , являющейся ее серединой. Найдите угол, образованный боковой гранью SBC с плоскостью основания, если $AO:OK = 8:1$ и $\angle AOB = 90^\circ$

82. КГПИ, 1989 г., физ.-мат. факультет, № 1 (из 5).

Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

83. МИСИ, 1989 г., № 6 (из 7).

Основание наклонного параллелепипеда — прямоугольник с длинами сторон 5 см и 12 см. Боковое ребро равно диагонали основания и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем.

84. МИСИ, 1989 г., № 6 (из 7).

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a , и углом при вершине 120° . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

85. МИСИ, 1989 г., № 6 (из 7).

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с высотой пирамиды угол 45° . Длина бокового ребра равна $2l$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

86. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1989 г., № 6 (из 6).

В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна диаметру окружности, описанной вокруг основания. Между сферой и пирамидой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

87. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1989 г., № 6 (из 6).

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ у которого AA_1 — одно из ребер, через вершину A , середину ребра $A_1 D_1$ и центр грани $D_1 D C C_1$ проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найдите сечение с наибольшей площадью; определите его площадь, считая длину ребра равной a .

88. КГУ, 1989 г., физ.-мат. факультет, педагогич. факультет, № 1 (из 5).

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Найдите высоту пирамиды.

89. МАИ, 1989 г., № 6 (из 6).

В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписана сфера. Отношение площади основания ABC пирамиды к площади поверхности сферы равно q . Плоскость, параллельная основанию пирамиды, касается сферы и отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду $SA_1 B_1 C_1$. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамид $SABC$ и $SA_1 B_1 C_1$.

90. МАИ, 1989 г., № 6 (из 6).

Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а окруж-

ность основания конуса вписана в четырехугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AD и BC основания пирамиды и делящей ребро SC в отношении $3:1$, считая от вершины S . Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

91. МИЭТ, 1989 г., № 7 (из 13).

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

92. МЭИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Найдите радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

93. МИЭМ, 1989 г., № 3 (из 5).

В кубе $ABCD A'B'C'D'$ с ребром a точка M — середина ребра BC , точка N — середина ребра $C'D'$, точка P — середина ребра AA' . Найдите периметр треугольника MNP . Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью MNP имеет больший объем?

94. МИФИ, 1989 г., № 4 (из 4).

Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQR P_1 Q_1 R_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание PQR призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого является грань $QQ_1 P_1 P$, равно q . Найдите величину угла наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что величина угла между прямыми PQ_1 и RR_1 равна φ .

95. МИФИ, № 4 (из 4).

Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол величиной α , а с боковым ребром SC — угол величиной β . Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l .

96. СГУ, 1989 г., биологич. факультет, № 3 (из 4).

В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб с острым углом 60° . Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

97. СГУ, 1989 г., биологич. факультет, № 3 (из 4).

В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30° . *

98. СГУ, 1989 г., геолог. и географ. факультеты, № 3 (из 4).

Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

99. СГУ, 1989 г., географ. и геолог. факультеты, № 3 (из 4).

В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и углом ACB , равным 120° . Боковая грань, опирающаяся на AB , перпендикулярна основанию пирамиды. Площади двух других боковых граней равны 3 и 2. Найдите стороны треугольника ABC , если сторона AB делится высотой пирамиды на отрезки, длины которых относятся как 2:1.

100. СГУ, 1989 г., физич. и географ. факультеты, № 3 (из 4).

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. На ребре SC выбрана точка L так, что $SC = 3 \cdot SL$. Найдите расстояние между прямой SA и прямой, проходящей через точку L и середину ребра SB .

101. СГУ, 1989 г., физич. и географ. факультеты, № 3 (из 4).

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC . Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если величина угла между прямой SA и прямой, проходящей через точку C и середину ребра SB , равна 60° , а расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно 2.

102. СГУ, 1989 г., мех. мат. факультет, № 3 (из 4).

Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

103. СГУ, 1989 г., мех. мат. факультет, № 3 (из 4).

Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании

* Задача сформулирована некорректно. Будем считать, что плоскость не пересекает квадратных оснований.

прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник ABC с углом при вершине B в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол ABC .

104. ГГУ, 1989 г.

Рассматриваются всевозможные цилиндры заданного объема V . В каждый из них вписана 7-угольная призма. Найти высоту той из этих призм, площадь полной поверхности которой минимальна.

105. ГГУ, 1989 г.

В правильной треугольной пирамиде известны высота H и величина двугранного угла 2α , образованного боковыми гранями. Найдите длину стороны основания.

106. ЛГУ, 1989 г., геологич. факультет, № 5 (из 5).

В шар радиуса R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H . Найдите объем призмы.

107. ЛГУ, 1989 г., мат. мех. факультет, факультет психологии, № 5 (из 5).

В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру DC , длина AB равна a , длина DC равна b . Оказалось, что углы, образованные DC с гранями ACB и ABD , равны α . Найдите объем пирамиды.

108. ЛГУ, 1989 г., факультет прикл. матем., эконом. киберн. экономич. факультета, отд. матем. лингв. филолог. фак., № 5 (из 5).

Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник, а двугранные углы при основании равны α , α , $\frac{\pi}{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее высота равна h .

109. ЛГУ, 1989 г., биолог. и физич. факультеты, № 5 (из 5).

Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

110. ЛГУ, 1989 г., географ. и химич. факультеты, № 5 (из 5).

Параллельными плоскостями в трехгранном угле отсечены две пирамиды с объемами U и V ($U < V$). Найдите объем третьей пирамиды, если ее основание совпадает с основанием меньшей, а вершина лежит на основании большей пирамиды.

111. НГУ, 1989 г., мех.-мат. и экономич. факультеты, № 5 (из 5).

Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA' ,

BB' , CC' , DD' . Длина ребра куба равна единице. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол в 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

112. НГУ, 1989 г., физич. факультет, № 5 (из 5).

Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . Длины всех ребер куба равны единице. Точки M и N — середины CD и CC' соответственно. Найдите расстояние между прямыми AN и BM .

113. НГУ, 1989 г., факультеты естественных наук и геолого — географический, № 5 (из 5).

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$, $BC=2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS . Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определить величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC .

114. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., географ. факультет, № 4 (из 5).

Даны четыре точки A , B , C , D , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A , и прямых BC и CD в точке C . Найдите площадь сферы, если известно, что $AB=1$, $BD=2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.

115. МГУ, им. М. В. Ломоносова, 1989 г., ВМК, № 6 (из 6).

В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC . Точка O , являющаяся серединой высоты SH , находится на одинаковом расстоянии от точки S , точки E , лежащей на ребре SA , и точки F , лежащей на ребре SB . Известно, что $SH=8$, $AB=16\sqrt{2}$, $EF=8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше 30° , а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

116. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., ф/ф, № 4 (из 6), В. 1.

В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

117. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 г., ф/ф, № 4 (из 6), В. 2.

В правильной четырехугольной пирамиде отношение высоты пирамиды к стороне основания равно 2. Найдите отношение радиуса описанного около пирамиды шара к апофеме пирамиды.

118. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 мех. мат., № 5 (из 6).

Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна $4\sqrt{3}$. Известно, что $AS=BS=8$, а двугранный угол между гранями ABC и ABS равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

119. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989 мех. мат., № 5 (из 6).

Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL=1$, $PQ=3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

120. МФТИ, 1989 г., № 4 (из 5).

Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E , на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1=1$, $FD=\frac{3}{4}$, $EF=\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

121. МФТИ, 1989 г., № 5 (из 5).

Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре BC взята точка F , на продолжении ребра DC за точку C — точка E так, что $CE=CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найдите отношение $BF:FC$.

122. МГУ, химфак, 1990 г., № 5 (из 5).

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$ см, $BC=9$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB и AD соответственно, $AE=4$, $AF=6$. Найти площадь пятиугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через E и F и параллельной AS .

123. МГУ, физфак, 1990 г. № 6 (из 6).

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ AD — высота основания ABC . Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания ABC

и боковых граней ASC и ASB пирамиды. Известно, что $AD/SD = m$. Найти:

1. отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

2. в каких границах может изменяться это отношение при изменении m ;

3. при каких m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.

124. МГУ, мехмат, 1990, № 6 (из 6)

В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, и $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1 . Сфера S_2 , радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1 , касается сферы S_1 , плоскостей SAC и ABC . При этом отрезок прямой SB , заключенный внутри сферы S_2 , имеет длину $\frac{6}{\sqrt{7}}$. Найти радиус сферы S_2 .

125. МГУ, мехмат, 1990, № 6 (из 6).

Длины ребер правильного тетраэдра $KMNL$ равны $2\sqrt{6}$. Сфера S_1 с центром в точке O_1 касается граней MNL , KML , KNL . Сфера S_2 с центром в точке O_2 касается сферы S_1 и плоскостей KML , MNL . Найти радиус сферы S_1 , если длина отрезка O_1O_2 в два раза больше диаметра сферы S_1 , а расстояние от точки O_2 до ребра KN равно $\sqrt{7}$.

126. МФТИ, 1990 г. № 5 (из 5).

В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 14, а углы ABC , ASB и двугранный угол при ребре AB являются прямыми. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB . Наибольшая из площадей таких проекций равна 21, а наименьшая — $6\sqrt{5}$. Найти объем пирамиды.

127. МФТИ, 1990, № 5 (из 5).

В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) площади 1,5. Ребро SA является высотой пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB . Наибольшая из площадей таких проекций равна 2,5, а наименьшая — $\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды.

128. МФТИ, 1990 г. № 5 (из 5)

Дана правильная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E лежит на ребре SD , причем

$SE=2ED$, точка F — середина ребра AD . Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD , а третья — на прямой EF . Найти объем конуса, если $AB=1$, $SO=\sqrt{3}$.

129. МФТИ, 1990 № 5 (из 5)

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и цилиндр, центр симметрии которого лежат на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина апофемы грани BSC , точка F принадлежит ребру SD , причем $SF=2FD$. Прямоугольник, являющийся одним из осевых сечений цилиндра, расположен так, что две его вершины лежат на прямой AB , а одна из двух других вершин лежит на прямой EF . Найти объем цилиндра, если $SO=12$, $AB=4$.

Ответы и указания

$$1). 6\sqrt{41}. 2). a^2\sqrt{3}, \frac{a^2\sqrt{2}}{12}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{6}}{4}, \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$3). \frac{a^3\sqrt{1+2\cos\alpha}}{24\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right), 2\arcsin\left(\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right), \frac{a\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)},$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}}$$

$$4). \frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}, \arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right), 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$$

$$6). \frac{ab}{4} \quad 7). \text{ а) } \frac{9}{8}a^2; \text{ б) } \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \text{ в) } \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

8). Если сечение перпендикулярно оси цилиндра, то утверждение задачи очевидно. Для любой другой плоскости, пересекающей ось в той же точке, объемы частей цилиндра и площади частей боковой поверхности не меняются. 9). $\frac{3}{8}$.

$$10). \text{ а) } \frac{1}{10+6\sqrt{3}}, \text{ б) } \frac{3}{\pi(5+3\sqrt{3})}, \text{ 11). } \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}} \quad 12). \frac{2(\sqrt{6}+1)}{3(\sqrt{3}+1)}$$

$$13). \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{24} \quad 14). \text{ а) } \arccos \frac{1}{3} \quad \text{ б) } 90^\circ. \quad 15). \frac{V}{2} \quad 16). \text{ а) } a^2 \sqrt{2}, \text{ б) } a^2 \sqrt{3} \\ 17). 45^\circ. \quad 18). \frac{9\sqrt{91}}{4}. \quad 19). \frac{4}{3} \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}, \sqrt{2} \quad 20). 54. \quad 21). \frac{9\sqrt{3}}{25}.$$

22). $\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$ Указание. Центры шаров располагаются на одной диагонали куба. Пусть это диагональ MN . O_1 и O_2 — центры шаров, их радиусы — r . Тогда $MN = a\sqrt{3}$, $MO_1 = r\sqrt{3}$, $O_1O_2 = 2r$, $O_2N = r\sqrt{3}$. Имеем $a\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} + 2r$. 23). $\frac{1}{2} \arccos(\sqrt{3}-1)$ Указание. R , h , l — радиус основания, высота и образующая конуса: $h^2 = l^2 - R^2$, $2l^2 + l^2\sqrt{3} = 4R^2$ (из условия, что угол в осевом сечении 150°). Высота сечения равна $l\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, если φ — угол наклона, то $\sin^2 \varphi = \frac{2h^2}{l^2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 26). $2\sqrt{3}$.

$$27). \frac{9}{4}. 28). \frac{9+4\sqrt{6}}{5}. 29). \frac{3^4\sqrt{3}}{4}. 30). \frac{a(\sqrt{6}-1)}{10} \quad 31). 2. \text{ Указание.}$$

Пусть две вершины A и B правильного треугольника принадлежат нижнему основанию. Обозначим его сторону через $2x$. Спроектируем треугольник на нижнее основание. Получим равнобедренный треугольник ABC_1 , в котором $AB = 2x$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{4x^2 - 2}$. По теореме синусов найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABC_1 (через x), получим $R = \frac{4x^2 - 2}{2\sqrt{3}x^2 - 2} = 1$ 32). $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. 33). $\frac{a^2}{3}(\sqrt{15} + \sqrt{6})$

$$34). \sqrt{\frac{3V}{4\pi}} \left(\frac{\sqrt{-1-2\cos\alpha} + 1}{\sqrt{-1-2\cos\alpha}} \right) \text{ Указание. Если } a \text{ — сторона основания то последовательно найдем: высоту в боковой грани, опущенной на боковое ребро } \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ апофему боковой грани } b = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{-1-2\cos\alpha}}$$

A поскольку расстояние от центра основания до стороны равно $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ то высота h делится центром вписанного шара в отношении (по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника) $\frac{h-r}{r} = \frac{b}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-1-2\cos\alpha}}$, $\frac{h}{r} = \frac{h-r}{r} + 1$ и т. д. 35).

$$2 \arccos \frac{\sin \frac{3\pi}{10}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad 36). \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}} \quad 37). Sh \quad 38). \frac{4\sqrt{3}}{27}. \quad 39). \text{ Если } \alpha < 60^\circ,$$

$$\text{то } V = \frac{3}{2} \sqrt{3} l^3 \frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \right)}{\left(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \right)^3} \text{ При других } \alpha \text{ будет } V = 0. \text{ Указание.}$$

Пусть $h = l \cos \frac{\alpha}{2}$, $R = l \sin \frac{\alpha}{2}$ — высота и радиус основания конуса, y — высота призмы, x — сторона основания. Имеем $\frac{h-y}{h} = \frac{x}{b}$, $y = h \frac{R-x}{R}$ Полная поверхность призмы равна

$$S = 3x^2\sqrt{3} + 6yx = 3x^2(\sqrt{3} - 2\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}) + 6x\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad \text{Причем,}$$

$0 \leq x \leq l \sin \frac{\alpha}{2}$. Если $\sqrt{3} - 2\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \geq 0$, наибольшее значение при на-

ибольшем $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$. Если $\sqrt{3} - 2\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 0$, но $\frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}} \geq l \sin \frac{\alpha}{2}$

(абсцисса вершины параболы правее точки $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$), то наибольшее значение S также при $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$. При других значениях α наибольшее

значение при $x = \frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}}$ 40). $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. Указание. В основании

лежит прямоугольный треугольник ABC : $\angle B = 90^\circ$, $AC = 6$. Биссектриса угла C равна $2\sqrt{3}$. Но радиус окружности, по которой сфера пересекает плоскость основания, также равен $2\sqrt{3}$. Значит, сфера пересекается с основанием ABC по дуге, соответствующей углу $\frac{\pi}{6}$, окружности

радиуса $2\sqrt{3}$. 41). В четыре раза. 42). $\frac{1}{2}$. 43). 1 (см³). 44).

$\frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{(k+1)^2}{k-1}$ 45). $\frac{\sqrt{3}h^2}{k^2-1}$ Указание. Пусть φ — угол наклона боковых граней пирамиды к основанию. Докажите, что

$\cos \alpha = \frac{1}{k}$ 46). $\frac{\pi l^3}{3} m^2 \sqrt{1-m^2}$ 47). $\frac{7\sqrt{39}}{36}$. 48). $\frac{b^3}{3} \sin 2\alpha \cos^2 \beta \sin \beta$.

49). $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ 50). $2\arcsin \sqrt{\frac{1+\cos^2 \alpha}{2}}$ 51). $2^3 \sqrt{\frac{V \sin \alpha/2}{3(1-4\sin^2 \alpha/2)}}$

52). $\frac{2r^3 \sin^2 \alpha}{3} \sqrt{3\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha}$ 53). $H \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ 54). 2. 55). $\frac{1}{12}$.

Указание. Если O — центр куба, K — середина MB' , то искомое расстояние равно проекции OK на MB' . 56). $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$ Указание. Угол CBS является линейным углом двугранного угла между плоскостями ABC и ABS . Плоскость, образующая равные углы с ABC и ABS , должна пересекать BC и BS в точках, равноудаленных от B . Эта плоскость не может проходить через середину BC (Докажите). Значит, эта плоскость должна пересекать продолжение BC за точку B в такой точке M , что $BM = \frac{1}{2}BC$. Пусть K и L — середины AC и BS . Прямая MK

пересекает AB в точке P такой, что $BP = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}$ Задача сводится к нахождению двугранных углов при LP и MP в пирамиде $BLMP$, в которой $BM = BL = 1$, $BP = \frac{1}{2}$. Все плоские углы при вершине B

прямые. 57). $\frac{5\sqrt{3}}{12}$. Указание. Рассмотрим плоскость α , проходящую через M , N и C_1 . Эта плоскость проходит через середину AK (Докажите). Плоскость β , проходящая через K , L и C пересекает A_1B_1 в середине MB_1 . Плоскость α и β параллельны (Докажите). Значит, они

искомые. Каждая из них отсекает от призмы $\frac{7}{24}$ ее объема. (Продолжим плоскость KCL до пересечения с BB_1 в точке P . Высота пирамиды $KBCP$ в два раза больше высоты призмы, а площадь основания вдвое меньше. Объем пирамиды $\frac{1}{3}$ объема призмы. От этой пирамиды еще отрезается часть, объем которой $\frac{1}{8}$ объема пирамиды). Следовательно, между плоскостями $\frac{5}{12}$ объема призмы. 58). $\frac{5}{4}\sqrt{11}$. Указание. Докажите, что объем этой пирамиды не меняется при перемещении отрезков

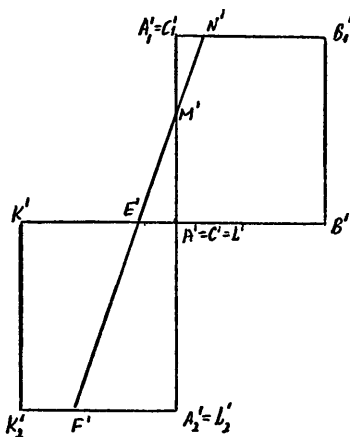


Рис. 31

MN и PQ соответственно по прямым CA и BS (Если PQ фиксирован, а MN перемещается, то не меняется площадь треугольника MNP и расстояние от Q до плоскости MNP). Переместим точку M в C , а P — в B . Тогда N перейдет в N' , $CN' = 5$, Q перейдет в Q' , $BQ' = 3$. $S_{CBN'} = \frac{5}{4}S_{CAB} = 5$. Расстояние

от Q' до плоскости ABC равно $\frac{3}{4}h$, h — высота пирамиды. 59). $\frac{\sqrt{91}}{24}$.

Указание. Пусть для определенности K симметрична B , L симметрична C . Рассмотрим проекцию данной конфигурации на плоскость, проходящую через A_1A_2 перпендикулярно ACC_1A_1 (рис. 31). На этом рисунке для простоты проекции обозначены теми же буквами, что и проекти-

руемые точки, со штрихом). Прямая $F'E'$ пересекает $A'A_1$ в точке M' такой, что $A'M' = \frac{2}{3}A'A_1 = \frac{2}{3}$, а отрезок A_1B' — в точке N' , $A_1N' = \frac{1}{8}A_1B'$. Нетрудно убедиться, что наша прямая не пересекает грань

BCC_1B_1 исходной призмы: $M'N' = \frac{1}{3}E'N' = \frac{1}{3}F'E'$. Значит, искомый отрезок равен $\frac{1}{3}EF = \frac{\sqrt{91}}{24}$ 60). $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $V=8$. Указание. Докажите, что плоскость SAB перпендикулярна $ABCD$.

61). $\frac{8}{\sqrt{7}}$. Указание. Пусть BB_1 и DD_1 касаются шара в точках P и Q , отрезок PQ перпендикулярен BB_1 и DD_1 . Кроме того, $BP=BC=DC=DQ$. Значит, $BPQD$ — прямоугольник. Итак, боковые ребра призмы перпендикулярны диагонали BD . Пусть M — точка касания шара с ребром AA_1 , K — середина PQ ($PQ=BD=6$), O — центр шара. Точки A , M , K , O , C лежат в плоскости, перпендикулярной $ABCD$. Пусть радиус шара x , $\angle MAC=2\varphi$. Имеем $x=AC \operatorname{tg} \varphi=8 \operatorname{tg} \varphi$, $OK=\sqrt{x^2-9}$, $KM=x \pm \sqrt{x^2-9}$. Но KM равен расстоянию от середины AC до AM , то есть $KM=4 \sin 2\varphi = \frac{8 \operatorname{tg} \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{64x}{64+x^2}$. Получаем для

x уравнение $x \pm \sqrt{x^2 - 9} = \frac{64x}{64 + x^2}$ или $\pm \sqrt{x^2 - 9} = \frac{x^3}{64 + x^2}$ (значит, знак в $KM \leftarrow \rightarrow$). Для решения этого уравнения перед возведением в квадрат удобно сделать замену $x = 8y$. 62). $\frac{27\pi}{80}$. Указание. Условия

задачи позволяют сделать следующее заключение. Образующей цилиндра будет отрезок DK , где K — точка на SC такая, что DK параллельна SB . Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в треугольник AMC , где M — основание перпендикуляра, опущенного из A (из C) на SB . При этом точка касания этой окружности со сторонами CM и AM делит их в отношении 3 : 2 (от вершин A и C). Если теперь сторона основания пирамиды равна a , то в треугольнике ACM стороны AM и CM делятся точками касания со вписанной окружностью на отрезки $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{3}$. Нетрудно найти радиус этой окруж-

ности (радиус основания цилиндра). Он равен $\frac{a}{4}$. Боковое ребро

пирамиды $\frac{3a}{\sqrt{11}}$. Образующая цилиндра равна $\frac{9a}{5\sqrt{11}}$. Высота пирами-

ды равна $\frac{4a}{\sqrt{33}}$. 63). $\frac{28\pi}{1215}$. Указание. См. решение предыдущей задачи.

64). $10\sqrt{13}$, 30, $10\sqrt{\frac{14}{13}}$. Указание. Пусть P — середина AB . Из условия следует, что NK содержит B , причем $BK = MA$, $BN = LA$. Так как $\angle PAM$ тупой ($MA < ML$), то тупой также $\angle KBP$. Значит, ближайшей к K точкой квадрата $ABCD$ будет B , $KB = 5$. (Здесь учитываем, что $NB = NC$). Ближайшей к M является проекция M на AD . Поскольку $MA = BK = 5$, то проекция MA на AD равна $\sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$, то есть MA образует с AD угол φ , $\cos \varphi = \frac{\sqrt{13}}{5}$. Положим $AB = 2x$, $KN = y$. Проекция $BN = y - 5$ на CB равна x (т. к. $NB = NC$), а угол между BN и CB равен φ , значит $(y - 5)\frac{\sqrt{13}}{5} = x$. Второе уравнение получим, записав

теорему косинусов для треугольника PNB ($\angle PNB = 45^\circ$, $PN = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $PB = x$, $NB = y - 5$): $x^2 = \frac{y^2}{2} + (y - 5)^2 - y(y - 5)$. и т. д. 65). $\frac{63\sqrt{6}}{8}$.

Указание. Пусть плоскость α пересекает прямую AB в точке P . Обозначим $AB = a$, $AA_1 = b$, $AK_1 = xa$, $A_1M = yb$. Последовательно найдем

$$AP = \frac{xa}{2x - 1}, K_1P = \frac{2x}{2x - 1}, KK_1 = \frac{x\sqrt{14}}{2x - 1},$$

$$MK_1 = (y + 1)\frac{7}{2}, \frac{y}{y + 1} = \frac{K_2K_3}{K_1P} = \frac{3(2x - 1)}{8x}.$$

Из последнего равенства найдем $y = \frac{6x - 3}{2x + 3}$. Записав теорему косинусов для треугольника K_1AP ,

получим (после преобразований) $14 = (4x^2 - 6x + 3)a^2$. Запишем равенство $PM^2 - K_1M^2 = PA^2 - K_1A^2$. Заменяем PM^2 по теореме косинусов из

$$\triangle PK_1M, \cos \angle PK_1M = \frac{1}{\sqrt{56}} \cdot \frac{14x^2}{(2x - 1)^2} - \frac{7(y + 1)x}{2(2x - 1)} = \left(\frac{x^2}{(2x - 1)^2} - x^2 \right) a^2$$

В получившемся соотношении заменим y и a через x .

$$\frac{14x^2}{(2x-1)^2} - \frac{28x^2}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{4x^2}{(2x-1)^2(x-x^2)} \cdot \frac{14}{4x^2-6x+3}. \text{ Далее имеем}$$

$$\frac{5-2x}{2x+3} = \frac{4(x-x^2)}{4x^2-6x+3}. \text{ Из этого уравнения найдем } x = \frac{5}{6}. \text{ Далее}$$

$$y = \frac{3}{7}, a = 3\sqrt{2}, b = \frac{7}{4}\sqrt{2}. 66). \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}. 67). 90^\circ. 68). \arctg\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha\right)$$

$$69). \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}. 70). 72. 71). \operatorname{Hctg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. 72). \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3\sin^2 F} - 1}$$

$$73). 3. 74). 60^\circ. 75). 54.$$

$$76). \frac{1}{2}a^2\sin \alpha\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2 \beta} \text{ или } a^2\sin \frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2 \beta} \text{ в}$$

зависимости от того, является ли угол B ромба тупым или острым.

$$77). R=2, H=4. 78). N\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right). 79). \frac{1}{12}b^3\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$80). 8. 81). \arctg \frac{9h}{a(5\sin \alpha + 2\sqrt{5}\cos \alpha)} \text{ Указание. Задача сводится}$$

к определению расстояния от точки O до BC . В равнобедренном треугольнике ABK высота BO делит боковую сторону в отношении $AO:OK=8:1$. Положим $OK=x$, $AO=8x$, $BK=9x$.

Выражая BO из треугольников ABO и KBO и приравнявая эти выражения, найдем $x = \frac{a}{12}$. Если $\angle OBA = \varphi$, то $\sin \varphi = \frac{2}{3}$
 $\angle OBC = 180^\circ - \alpha - \varphi$. Расстояние от O до BC равно
 $OB\sin(\alpha + \varphi) = a\frac{\sqrt{5}}{3}(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = a\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sin \alpha + \frac{2}{3}\cos \alpha\right)$

$$82). \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} \alpha\right); \arctg\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} \alpha\right). 83). 390 \text{ (см}^3\text{)}. 84). \frac{a^3}{4}. 85).$$

$$4l^2\sqrt{3}. 86). \frac{25R^3\sqrt{3}}{144}. \text{ Указание. Если } \varphi \text{ — угол между апофемой боковой}$$

грани и высотой пирамиды, то $\sin \varphi = \frac{1}{4}$. Таким образом, расстояние

от центра сферы до боковой грани равно $d = R\sin \varphi = \frac{R}{4}$. Пусть

x — высота призмы. Радиус окружности, описанной около основания призмы равен $\rho = \sqrt{R^2 - (d+x)^2}$. Сторона основания призмы равна $\rho\sqrt{3}$.
 О б ъ е м п р и з м ы б у д е т р а в е н

$$V = \frac{3\rho^3\sqrt{3}}{4}x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - \left(\frac{R}{4} + x\right)^2\right)x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{15}{16R^2x - \frac{1}{2}Rx^2 - x^3}\right)$$

Приравнявая к нулю производную, получим уравнение

$$\frac{15}{16}R^2 - Rx - 3x^2 = 0, \text{ откуда, } x = \frac{5}{12}R. 87). \frac{\sqrt{14}}{3}. \text{ Указание. Докажите,}$$

что искомое сечение проходит через C . (В этом сечении будет параллелограмм. В любом другом параллельном сечении от этого параллелограмма отрезается часть). 88). $2\sqrt{3}. 89). \left(\frac{4\pi q}{3\sqrt{3}}\right)^2. 90). \frac{\pi\sqrt{3}}{32}. \text{ Указа-}$

ние. Пусть сторона основания пирамиды равна 1. В сечении будет равнобокая трапеция с основаниями 1 и $\frac{3}{4}$. В эту трапецию можно

вписать окружность. Из этого условия следует, что ее боковые стороны

равны $\frac{7}{8}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SKC (K — середина BC). Катет $KC = \frac{1}{2}$. Если M делит SC в отношении 3:1, то $KM = \frac{7}{8}$. Пусть $SC = 4x$, $MC = x$. Запишем теорему косинусов для треугольника KMC ($\cos \angle KCM = \frac{1}{8x}$). $\frac{49}{64} = x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, $x^2 = \frac{41}{64}$. Высота пирамиды равна $\sqrt{\frac{41}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$. Высота трапеции $\sqrt{\frac{49}{64} - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SHL (H — основание высоты, L — середина CD), P — точка на SL , $SP:PL = 3:1$. $HP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $PL = \frac{1}{4}SL = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{39}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Радиус основания конуса равен $\frac{1}{2}HP = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Угол между образующей и плоскостью равен $\varphi = \angle PHL$. Запишем через теорему косинусов для ΔPHL : $\frac{10}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2V\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Высота конуса равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ и т. д. 91). $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 92). $\frac{a^3\sqrt{4}}{2}$ 93). $\frac{3a\sqrt{6}}{2}$

Обе части равны. 94). $\arctg\left(\frac{2q\sqrt{3}}{1+q}\operatorname{ctg} \varphi\right)$. 95). $\frac{l^2}{2}\cos^2\beta \sin 2\alpha$ или $\frac{3}{4}l^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$ или $\frac{3}{4}l^2\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha}$. Указание. Искомое сечение должно быть параллельно или основанию пирамиды или одной из боковых граней и делит пополам пересекаемые им ребра. 96). $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ 97). $2\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi - 2\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. 98). $2\frac{7}{18}, \frac{11}{18}$. 99). $\sqrt[4]{720}, \sqrt[4]{80}, \sqrt[4]{80}$ 100). $\sqrt{\frac{3}{7}}$ 101). $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

102). $2\arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{3}}$ 103). $2\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 104). $\sqrt[3]{\frac{4V\cos^2\frac{\pi}{7}}{\pi}}$

Указание. Пусть r и h — радиус основания и высота цилиндра. Имеем $\pi r^2 h = V$. Пусть $\varphi = \frac{\pi}{7}$. Полная поверхность призмы равна $7r^2\sin 2\varphi + 14rh\sin \varphi = 7r^2\sin 2\varphi + \frac{14V}{\pi r}\sin \varphi$. Последнее выражение минимально, если $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi\cos \varphi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4V\cos^2\varphi}{\pi}}$. 105). $h\frac{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}{\cos \alpha}\sqrt{3}$

106). $\frac{1}{16}H(4R^2 - H^2)3\sqrt{3}$ 107). $\frac{1}{12}ab^2\operatorname{tg} \alpha$. Указание. Проведите через DC плоскость, перпендикулярную AB . В сечении будет равнобедренный треугольник, углы при DC равны α .

108). $\frac{4\sqrt{3}}{9}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$ 109). $\frac{3\pi}{32}$ 110). $U\left(\sqrt[3]{\frac{V}{U}}-1\right)$ 111). 1:1

Указание. Пусть проведенная плоскость пересекает AB в точке K , $A'B$ — в точке M . Если $BK = x$, то $BM = \frac{x\sqrt{2}}{x+1}$. Объем пирамиды

CB_1BK равен (KBC — основание) $\frac{x}{6}$. С другой стороны, если основа-

ние $KB'C$, то высота равна $BM \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{6}}{2(x+1)}$. Площадь основания

$KB'C$ равна $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$. Получаем для x уравнение

$\frac{x}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{x+1}$, из которого найдем $x = \frac{1}{2}$. 112). $\frac{2}{\sqrt{41}}$. Указа-

ние. Проведем через BB' плоскость, перпендикулярную BM . Обозначим через A_1, C_1 и N_1 проекции на неё точек A, C, N . Задача сводится к определению расстояния от точки B (проекция M совпадает с B) до прямой A_1N_1 . Нетрудно найти $BC_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (расстояние от C до BM),

$A_1B = 2BC_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. А поскольку $C_1N_1 = \frac{1}{2}$, то

$A_1N_1 = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1N_1^2} = \frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{5}}$. Расстояние от C_1 до A_1C_1 равно $\frac{3}{\sqrt{41}}$.

Искомое расстояние составляет от него $\frac{2}{3}$. 113). $\arctg \sqrt{5}$. 114). 6л.

Указание. Из условий следует: $AD = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{3}$, $CD = AD = \sqrt{3}$. (касательные к сфере из одной точки), $CB = AB = 1$ (аналогично), $AC = \sqrt{2}$. Опустим из A и C перпендикуляры на DB . Они попадут в одну точку K , $AK = CK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Радиус искомой сферы равен радиусу

окружности в плоскости ACK , касающейся AK и CK в точках A и C . Если $\angle AKC = 2\varphi$, то $\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = AK \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 115).

$\frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$ Указание. Рассмотрим треугольник SCM , SH — высота этого треугольника (H на CM по условию), K — середина SC . Имеем $4\sqrt{13} = MK \geq MO =$

$= \sqrt{MH^2 + HO^2} \geq \sqrt{SH^2 \operatorname{ctg}^2 30^\circ + 16} = 4\sqrt{13}$. Таким образом, $\angle SMC = 30^\circ$, а точки C и H совпадают. Далее, CE и CF — основания перпендикуляров, опущенных из C на AS и BS (Докажите). Обозначим

$AS = x$, $BS = y$. Тогда $SE = \frac{CS^2}{AS} = \frac{64}{x}$, $SF = \frac{64}{y}$, поскольку $\frac{ES}{BS} =$

$= \frac{64}{xy} = \frac{FS}{AS}$, то треугольники SEF и SBA подобны. Значит,

$\frac{64}{xy} = \frac{ES}{BS} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $xy = 128\sqrt{5}$. Второе уравнение получим из то-

го, что в треугольнике ABS (стороны $x, y, 16\sqrt{2}$) медиана к стороне AB равна 16. Получим уравнение $x^2 + y^2 = 16 \cdot 3$. Поскольку $2xy = 16^2\sqrt{5}$,

то $(x+y)^2 = 16^2(3 + \sqrt{5}) = 16^2 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \right)^2$, $(x-y)^2 = 16^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \right)^2$. Пусть

$x \geq y$, тогда $x = 16\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y = \frac{16}{\sqrt{2}}$. Треугольник ABS прямоугольный с

гипотенузой AS . Значит прямоугольным является и треугольник ABC ,

$BC = 8$, $AC = 24$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}8^3\sqrt{2}$, полная поверхность —

$8^2(4+\sqrt{2})$ Радиус шара равен $\frac{8\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{8}{7}(2\sqrt{2}-1)$. 116).

$\frac{1}{\sqrt{21}+3}$. 117). $\frac{9}{4\sqrt{17}}$. 118). $5\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Рассмотрим треугольник SMC , где M — середина AB . $MC=6$, $SM=2\sqrt{13}$,

$\angle SMC = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. По теореме косинусов найдем $SC=2\sqrt{10}$. Пусть

P — центр ABC , P лежит на MC , причем $PC=4$, K — середина SC . Радиус искомой сферы равен диаметру окружности, описанной около PCK , в котором $PC=4$, $CK=\sqrt{10}$,

$\cos \angle PCK = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Имеем $\sin \angle PCK = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $PK=\sqrt{10}$. $R = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\frac{3}{5}}} =$

$= 5\sqrt{\frac{2}{3}}$. 119). $\frac{36\pi}{11\sqrt{11}}$. Указание. Поскольку в прямоугольник $KLMN$

можно вписать окружность, то $KLMN$ — квадрат. Треугольник KPL и NMQ являются равнобедренными. Это следует из того, что стороны KL и NM (основания) касаются вписанной окружности в серединах. Поскольку $KP=PL$, $NQ=MQ$, то проекция PQ на плоскость $KLMN$ параллельна KN . Следовательно, $(PQ$ — параллелен плоскости $KLMN$ по условию) PQ параллельна KN . Трапеция $NKPQ$ является равнобедренной. (В нее можно вписать окружность, которая касается основания KN в середине). Значит, шар касается PQ в середине. Учитывая равенство касательных, проведенных к шару из одной точки, найдем $KP=PL=NQ=QM=2$. Радиус искомого шара равен радиусу окружности, описанной около треугольника с вершинами в серединах KN , LM

и PQ . 120). $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. Указание. Рассмотрим сечение, проходящее через

B_1E и DF . В сечении будет прямоугольник BB_1M_1M . Положим, $BB_1=2x$, $B_1M_1=y$. Из подобия треугольников B_1M_1E и BDF найдем

$BF=\frac{3}{4}y$, $M_1E=\frac{4}{3}x$. Значит, $FM=\frac{y}{4}$, $EM=\frac{2}{3}x$. Записав теорему Пифагора для треугольников B_1M_1E и FME , получим систему

$y^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1$, $\frac{y^2}{16} + \frac{4}{9}x^2 = \frac{1}{12}$, из которой найдем $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Объем призмы будет наибольшим, если y есть высота основания.

121). $\frac{183}{40}$. Указание. Пусть ребро куба равно a , $CF=\lambda a$. Возьмем

систему координат с началом в точке C . Ось x -ов направим по CB , ось y -ов — по CD . В этой системе координат центр первой сферы $O_1(a-13, a-13, 13)$, центр второй сферы $O_2(5, a-5, 5)$. Плоскость проходит через точки $C_1(0, 0, a)$, $E(0, -a, 0)$, $F(\lambda a, 0, 0)$. Ее уравнение будет $\frac{x}{\lambda} - y + z - a = 0$. Поскольку отношение радиусов окружностей сечения

равно отношению радиусов сфер ($2,6=\frac{13}{5}$), то таким же будет и

отношение расстояний от центров сфер до плоскости, то есть $\left| \frac{a-13}{\lambda} - (a-13) + 13 - a \right| =$

$$= \frac{13}{5} \left| \frac{5}{\lambda} - (a-5) + 5 - a \right| \left| a - 13 \right| \left| \frac{1}{\lambda} - 2 \right| =$$

$$\frac{13}{5} \left| \frac{5}{\lambda} - 2a + 10 \right| \quad \text{Но } O_1 O_2 = 18. \quad \text{Откуда } (a-18)^2 + 128 = 324,$$

$$a-18 = \pm 14. \quad \text{Но по условию } a \geq 13, \text{ то есть } a = 32. \text{ Получаем уравне-}$$

$$\text{ние } 19 \left| \frac{1}{\lambda} - 2 \right| = \frac{13}{5} \left| \frac{5}{\lambda} - 54 \right|. \quad \text{Откуда } \lambda = \frac{40}{223}. \quad (\text{для другого решения}$$

$\lambda < 0$). 122). $\frac{3}{2} \sqrt{183}$. 123. Пусть $SD = 1$, $AD = m$. Обозначим через K точку пересечения плоскости основания конуса с AS . (Основание конуса лежит в плоскости BCK и совпадает с окружностью, вписанной в BCK). Пусть Q — центр основания конуса, SO — высота пирамиды.

Легко найдем $DQ = \frac{m}{3}$,

$$OA = \frac{2}{3}m, \quad DB = \frac{m\sqrt{3}}{3}, \quad SA = SB = \sqrt{SD^2 + DB^2} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{3}}. \quad \text{Из того,}$$

$$\text{что основание конуса вписано в } \triangle CBK, \text{ а его вершина } A \text{ следует, что}$$

$$\angle KBA = \angle DBA = 60^\circ. \quad \text{Если } \alpha = \angle KAB = \angle SBD, \quad \text{то}$$

$$\cos l = \frac{DB}{SB} = \frac{m}{\sqrt{3+m^2}}. \quad \text{По теореме синусов } \frac{AK}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})} =$$

$$= \frac{BK}{\sin \alpha}, \quad \text{откуда } AK = \frac{AB \sin \frac{\pi}{3}}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3})} = \frac{2m}{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2m}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+m^2}} + \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{3+m^2}}} = \frac{2m\sqrt{3+m^2}}{\sqrt{3}(m+1)},$$

$$BK = \frac{2m \sin \alpha}{\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right)} = \frac{4m}{\sqrt{3} + \frac{3 \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{4m}{\sqrt{3}(m+1)}.$$

$$\text{Далее } DK = \sqrt{BK^2 - DB^2} = \sqrt{\frac{16m^2}{3(m+1)^2} - \frac{m^2}{3}} =$$

$$= \frac{m}{m+1} \sqrt{\frac{15-2m-m^2}{3}}. \quad \text{Поскольку } BQ \text{ — биссектриса } \angle DBK, \text{ то}$$

$$(DQ=r) \quad \frac{r}{DK-r} = \frac{DB}{BK},$$

$$r = \frac{DK \cdot DB}{DB + BK} = \frac{m}{m+1} \sqrt{\frac{15-2m-m^2}{3}} \cdot \frac{m \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{m\sqrt{3}}{3} + \frac{2m}{\sqrt{3}(m+1)}} =$$

$$= \frac{m}{m+3} \sqrt{\frac{15-2m-m^2}{3}}.$$

$$1) \frac{S_{\text{бок.к.}}}{S_{\text{ABC}}} = \frac{\pi r \cdot AD}{DB \cdot AD} = \pi \frac{r}{DB} = \frac{\pi \sqrt{15-2m-m^2}}{m+3}; \quad 2) \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi \sqrt{15}}{3};$$

3) $0 < m \leq 1$. 124. $\sqrt{3}$ или $\frac{19}{25} \sqrt{3}$. Указание. Заметим, что двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Пусть O_1 и O_2 — центры

шаров, x — радиус шара S_1 , $3x$ — радиус шара S_2 , $O_1O_2=4x$. Учитывая, что O_1 и O_2 лежат в плоскости, проходящей через AC и образующей угол 30° с плоскостью ABC , можно доказать, что прямая O_1O_2 перпендикулярна AC .

Пусть P_1 и P_2 — точки касания шаров с плоскостью ABC . P_1 лежит на биссектрисе угла C , $P_1P_2 \perp AC$. Если P_1P_2 пересекает AC в точке K , то $P_1K=x\sqrt{3}$.

$P_2K=3x\sqrt{3}$, $CK=3x$. Рассмотрим треугольник BSM , где M середина AC . Центр O_2 находится на расстоянии MK от этой плоскости, $MK=|\sqrt{3}-3x|$.

Значит, плоскость BSM пересекает сферу S_2 по окружности радиусом $\rho=\sqrt{9x^2-(\sqrt{3}-3x)^2}=\sqrt{6\sqrt{3}x-3}$. Пусть O'_2 — центр этой окружности, N — проекция O'_2 на BM . Имеем $O'_2N=3x$, $NM=P_2K=3x\sqrt{3}$. Найдем расстояние d от O'_2 до прямой BS . Пусть для определенности $NM=3x\sqrt{3} \leq BM=3$, $\varphi = \angle SBM$, $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Обозначим через L точку пересечения NO'_2 с BS . Имеем $ML=BN \operatorname{tg} \varphi =$

$$=(3-3x\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (1-x\sqrt{3}),$$

$$LO'_2 = |NL - NO'_2| = \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}x - 3x \right| = \frac{3}{2} |\sqrt{3} - 5x|. \text{ Расстояние от } O'_2$$

до BS будет $d = LO'_2 \cdot \cos \varphi = \frac{3}{2} |\sqrt{3} - 5x| \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} (\sqrt{3} - 5x)$. По условию хорда, высекаемая окружностью с центром O'_2 и радиусом ρ равна $\frac{6}{\sqrt{7}}$, т. е. $\rho^2 - d^2 = \frac{9}{7}$. Получаем уравнение $6\sqrt{3}x - 3 - \frac{9}{7}(3 - 10\sqrt{3}x +$

$$+ 25x^2) = \frac{9}{7} \text{ или } 75x^2 - 44x\sqrt{3} + 19 = 0. \text{ Откуда } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{19\sqrt{3}}{75}.$$

125). 1, $\frac{11}{37 \pm 4\sqrt{6}}$. Указание. Пусть P — середина ребра KN .

Плоскость MLP содержит центры шаров O_1 и O_2 , при этом $O_2P=\sqrt{7}$. Пусть радиус первого шара равен x , а второго $3x$. Обозначим через Q , E_1 и E_2 соответственно проекции P , O_1 и O_2 на ML . Нетрудно найти $PQ=2\sqrt{3}$, $O_1E_1=x\sqrt{3}$, $O_2E_2=3x\sqrt{3}$, $O_1O_2=4x$, $E_1E_2=x\sqrt{6}$. Расстояние от O_2 до PQ будет $l=\sqrt{7-(2\sqrt{3}-3x\sqrt{3})^2}$. Расстояние от O_1 до $PQ-m=\sqrt{6}|1-x|$, наконец, расстояние от O_1 до O_2E_2 равно $\sqrt{(4x)^2-(3x\sqrt{3}-x\sqrt{3})^2}=2x$. При некотором выборе знаков выполняется равенство $\pm l \pm d \pm m = 0$ или $\pm \sqrt{-5+36x-27x^2} = \pm 2x \pm \sqrt{6}|1-x|$. После возведения в квадрат получим $-37x^2+48x-11 = \pm 4x\sqrt{6}|1-x|$ или $(x-1)(11-37x) = \pm 4x\sqrt{6}|1-x|$.

126. Пусть SK — высота, опущенная на AB . Обозначим $AB=a$, $SK=x$, $BC=y$, $KB=z$. Пусть далее φ — угол поворота рассматриваемой плоскости, определенный таким образом, что при $\varphi=0$ плоскость проходит через C , а при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ через S , $0 \leq \varphi < \pi$. Возникают 3 случая: 1). $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. В этом случае проекция пирамиды совпадает с проекцией треугольника ABC . — Это будет треугольник ABC_1 (C_1 — проекция C). Площадь проекции равна $\frac{1}{2} a y \cos \varphi$. При $\varphi=\varphi_0$ проекция S — точка S_1 — лежит на AC_1 , рассматриваемая плоскость перпендикулярна плоскости ASC . Нетрудно найти, что

$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a-z}{a} \cdot \frac{y}{x}$. 2) $\varphi_0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ Проекция есть четырехугольник ABC_1S_1 . Его площадь есть сумма площадей треугольников ABS_1 и S_1BC_1 . Она равна $\frac{1}{2}ax \sin \varphi + \frac{1}{2}zy \cos \varphi$ 3). $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$. В этом случае

площадь проекции равна $\frac{1}{2}ax \sin \varphi - \frac{1}{2}ay \cos \varphi$ Понятно, что наибольшей площадь может быть лишь в третьем случае, (так как $a > z$), а наименьшей при $\varphi = \varphi_0$. (на каждом участке изменения φ площадь является выпуклой вверх функцией, а значит наименьшее значение должно достигаться на границе соответствующего интервала изменения.). поскольку наибольшее значение функции $A \cos \varphi + B \sin \varphi$ равно $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим систему: $ay = 28$ (по условию),

$\frac{1}{2}\sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} = 21$, $\frac{1}{2}ay \cos \varphi_0 = 6\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a-z}{a} \cdot \frac{y}{x}$. Далее находим: $ax = 14\sqrt{5}$, $\cos \varphi_0 = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $zy = \frac{56}{3}$. Из первого и последнего равенств находим $z = \frac{2}{3}a$. Но по условию $\angle ASB$ прямой,

т. е. $x^2 = (a-z)z = \frac{a}{3} \cdot \frac{2}{3}a$, $x = \frac{a}{3}\sqrt{2}$. А поскольку $ax = 14\sqrt{5}$, то $a^2 = 21\sqrt{10}$. Объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3}axy = \frac{1}{3} \frac{(ax) \cdot (ay)}{a} = \frac{1}{3} \frac{14\sqrt{5} \cdot 28}{\sqrt{21}\sqrt{10}} = \frac{392}{3\sqrt{21}} \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{56}{3} \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

127. $2^4 \sqrt{\frac{5}{3}}$. 128. $\frac{\pi\sqrt{7}}{9}$. Обозначим через Q центр основания конуса,

M — его вершина, рассматриваемое сечение MPL . Понятно, что точки P и L не могут находиться на прямой CD . (Тогда на этой же прямой находился бы и центр основания конуса — точка Q). Пусть на CD находятся P и M . Спроектировав наш чертеж на плоскость, проходящую через SO параллельно BC (при этом точки C, D, P, M спроектируются в одну точку, также в одну точку спроектируются точки O и F ,

а также B и A), найдем, что $OQ = \frac{1}{4}SO = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $(SQ = \frac{5}{4}SO)$; а точка

L находится на расстоянии $2OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ от плоскости $ABCD$. Для доказа-

тельства этого утверждения на этом проекционном чертеже (обозначая проекции точек так же, как и на пирамиде, но со штрихом), проведем через $C' (= D' = P')$ перпендикуляр к BC до пересечения с $F'E'$

в точке K . Из того, что $S'E' = 2E'C'$, получим $C'K = \frac{1}{2}S'O' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Но $O'Q'$ — средняя линия треугольника $M'KL'$. (Все на проекционном чертеже).

Затем рассмотрим аналогично проекцию на плоскость, проходящую через SO параллельно AB . На этом чертеже опустим перпендикуляр

$L''L_1$ на $A''B''$. Поскольку $SL'' = \frac{3}{2}SA''$ (L'' удалена от $A''B''$ на

$\frac{1}{2}SO$), то $L_1O = \frac{3}{2}A''O = \frac{3}{4}OP''$. Нетрудно найти расстояние от Q

до DC . По теореме Пифагора это расстояние будет

$\sqrt{OQ^2 + \frac{1}{4}BC^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Но это расстояние является высотой в треугольнике PQM (из точки Q). Зная теперь в прямоугольном треугольнике PQM высоту на гипотенузу PM ($=\frac{\sqrt{7}}{4}$), проекцию катета PQ на гипотенузу ($=\frac{3}{4}$), найдем катеты $PQ(=1)$ и $MQ(=\frac{\sqrt{7}}{3})$, а затем и объем конуса ($=\frac{\pi\sqrt{7}}{9}$). 129. $\frac{375}{3}\pi$ или $\frac{1225}{18}\pi$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
I. 12 УРОКОВ ГЕОМЕТРИИ	3
Введение	3
Планиметрия	5
1. Треугольник. Элементарные и опорные задачи. Теорема косинусов	5
2. Прямоугольный треугольник	8
3. Описанная окружность. Теорема синусов.	13
4. Медианы треугольника. Точка пересечения медиан	15
5. Высота треугольника. Точка пересечения высот	17
6. Биссектрисы треугольника. Центр вписанной окружности	18
7. Площадь треугольника	21
8. Четырехугольник	24
9. Окружность. Хорды и углы	27
10. Окружности и касательные. Площадь круга и его частей	30
Стереометрия	34
11. Многогранники	34
12. Круглые тела. Цилиндр, конус, шар	34
II. ПЛАНИМЕТРИЯ	44
Ответы. Указания	59
III. СТЕРЕОМЕТРИЯ	68
Ответы и указания	85

2 р. 80 к.

НЕЗАМЕНИМ НА УРОКАХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТАХ И
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ НАБОР «ЛЮМОГРАФ»

- быстрое, простое, правильное выполнение рисунков основных геометрических фигур и их комбинаций.
- хороший обзор всех основных элементов изображенных фигур
- постоянное общение с интересным справочным материалом.

Заказы принимаются по адресу:

290053 г. Львов, а/я 5228, фирма «КВАНТОР».

